1

(1) 自然数 p と q の最大公約数を $G(p,\ q)$ と表す．このとき，

$$\begin{aligned} d &= G(629,\ 481) \\ &= G(148,\ 481)\quad (\because 629 = 481+148) \\ &= G(148,\ 37)\quad (\because 481 = 148\cdot 3+37) \\ &= 37\quad (\because 148 = 37\cdot 4) \end{aligned}$$

よって，求める整数 x, y は，

$$629x+481y=37$$

$$\therefore 17x+13y=1\quad \cdots ①$$

を満たすもの．ここで，

$$① \iff 17(x+3)=-13(y-4)$$

であり，17 と 13 は互いに素より，k を整数として，

$$(x+3,\ y-4)=(13k,\ -17k)$$

$$\therefore (x,\ y)=(13k-3,\ -17k+4)\quad \cdots (答)$$

(2)

$$a_1=\frac{1}{3}$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2-a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad \cdots ②$$

が成り立つとき，数学的帰納法により，

$$a_n \neq 0\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，②より，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2-a_n}{a_n}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}-1$$

さらに変形して，

$$\frac{1}{a_{n+1}}-1=2\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$$

が成り立つ．これより，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，

$$\frac{1}{a_n}-1=\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\times 2^{n-1}$$

であり，$a_1=\dfrac{1}{3}$ より，

$$\frac{1}{a_n}=2^n+1$$

が成り立つ．よって，求める一般項は，

$$a_n=\frac{1}{2^n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad \cdots (答)$$

(3) 5 人が A, B, C, D, E の 5 部屋に入るとき，入り方は全部で，

5^5（通り）

そのうち，「1 人だけ部屋が存在しない」条件は，

(ア) 2 人，3 人，0 人，0 人，0 人

(イ) 5 人，0 人，0 人，0 人，0 人

と 5 部屋に入ること．

(ア)について，

2 人の部屋と 3 人の部屋の選び方が，

$5\cdot 4$（通り）

また，2 人の部屋に入る人，3 人の部屋に入る人の選び方が，

${}_5C_2\cdot {}_3C_3$（通り）

よって，(ア)のような入り方は，

$5\cdot 4\times {}_5C_2\cdot {}_3C_3=200$（通り）

(イ)について，

5 人の部屋の選び方が，

5（通り）

また，5 人の部屋に入る人の選び方が，

1（通り）

よって，(イ)のような入り方は，

$5\times 1=5$（通り）

以上より，求める確率は，

$$\frac{200+5}{5^5}=\frac{41}{625}\quad \cdots (答)$$

2

$f_n(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\cos t+\sin 2nt)^2\,dt$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）について.

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対して,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 nt\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2nt}{2}\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4n}\sin 2nt\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}\quad\cdots(答)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2nt\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4nt}{2}\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{8n}\sin 4nt\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}\quad\cdots(答)$$

(2)　$$(x\cos t+\sin 2nt)^2=x^2\cos^2 t+2x\cos t\sin 2nt+\sin^2 2nt$$
であり,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos t\sin 2nt\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\sin(2n+1)t+\sin(2n-1)t\right\}dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)t-\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}$$

そこで,

$$b_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\quad\cdots☆$$

として, (1)も考えると,

$$f_n(x)=\frac{\pi}{4}x^2+b_n x+\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\pi}{4}\left(x+\frac{2}{\pi}b_n\right)^2-\frac{1}{\pi}{b_n}^2+\frac{\pi}{4}$$

とかける. よって, $f_n(x)$の最小値 a_n は,

$$a_n=f_n\left(-\frac{2}{\pi}b_n\right)=-\frac{1}{\pi}{b_n}^2+\frac{\pi}{4}$$

よって, ☆より,

$$a_n=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)^2+\frac{\pi}{4}\quad\cdots(答)$$

(3)　(2)より,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)^2+\frac{\pi}{4}\right\}=\frac{\pi}{4}\quad\cdots(答)$$

3

$0<a<b$ のとき，

(1) C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，点 P の軌跡は，

$$|y-a|+\sqrt{x^2+(y+a)^2}=2b \quad \cdots(*)$$

で与えらえる．よって，$y \geqq a$ のとき，

$$y-a+\sqrt{x^2+(y+a)^2}=2b$$

$$\therefore \sqrt{x^2+(y+a)^2}=2b+a-y \quad \cdots①$$

で与えられる．ここで，$y \leqq 2b+a$ の下で，

$$① \iff x^2+(y+a)^2=(2b+a-y)^2$$

$$\iff y=-\frac{1}{4(a+b)}x^2+b \quad \cdots㋐$$

で，$0<a<b$ より，㋐のとき，$y \leqq 2b+a$ を満たす．

よって，求める関係式は，

$$y=-\frac{1}{4(b+a)}x^2+b \quad \cdots(答)$$

(2) (1)と同様に，$y \leqq a$ のときも考える．このとき，

$$(*) \iff -y+a+\sqrt{x^2+(y+a)^2}=2b$$

$$\iff \sqrt{x^2+(y+a)^2}=2b-a+y \quad \cdots②$$

であり，$y \geqq a-2b$ の下で，

$$② \iff x^2+(y+a)^2=(2b-a+y)^2$$

$$\iff y=\frac{1}{4(b-a)}x^2-b \quad \cdots㋑$$

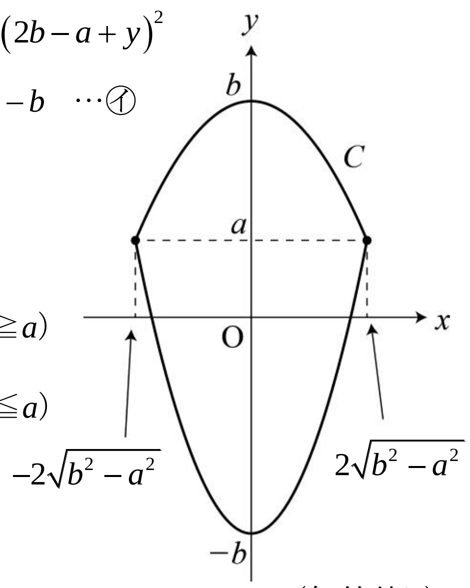
で，$0<a<b$ より，㋑のとき，

$y \geqq a-2b$ を満たす．

よって，軌跡 C は，

$$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{4(b+a)}x^2+b & (y \geqq a) \\ y=\dfrac{1}{4(b-a)}x^2-b & (y \leqq a) \end{cases}$$

で表せる右のような図形．



(3) 求める体積 V は，(2)の図より，

$$y_1=-\frac{1}{4(b+a)}x_1^{\ 2}+b \quad (y_1 \geqq a)$$

$$y_2=\frac{1}{4(b-a)}x_2^{\ 2}-b \quad (y_2 \leqq a)$$

を満たす x_1，y_1，x_2，y_2 を用いて，

$$V=\int_a^b \pi x_1^{\ 2}dy_1+\int_{-b}^a \pi x_2^{\ 2}dy_2$$

ここで，

$$\begin{aligned}\int_a^b \pi x_1^{\ 2}dy_1&=\int_a^b 4\pi(b+a)(b-y_1)dy_1\\ &=\left[4\pi(b+a)\left(by_1-\frac{1}{2}y_1^{\ 2}\right)\right]_a^b\\ &=4\pi(b+a)\left\{b(b-a)-\frac{1}{2}(b^2-a^2)\right\}\\ &=2\pi(b+a)(b-a)\{2b-(b+a)\}\\ &=2\pi(b+a)(b-a)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-b}^a \pi x_2^{\ 2}dy_2&=\int_{-b}^a 4\pi(b-a)(b+y_2)dy_2\\ &=\left[4\pi(b-a)\left(by_2+\frac{1}{2}y_2^{\ 2}\right)\right]_{-b}^a\\ &=4\pi(b-a)\left\{b(a+b)+\frac{1}{2}(a^2-b^2)\right\}\\ &=2\pi(b-a)(a+b)\{2b+(a-b)\}\\ &=2\pi(b-a)(a+b)^2\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}V&=2\pi(b+a)(b-a)^2+2\pi(b-a)(a+b)^2\\ &=2\pi(b-a)(b+a)\{(b-a)+(b+a)\}\\ &=4\pi b(b-a)(b+a) \quad \cdots(答)\end{aligned}$$

（解答終り）

4

(1) QとRは実軸に関して対称なので,

Q($\bar{z}$)

図1を$\dfrac{1}{w}$倍すると, 図2のようになる.

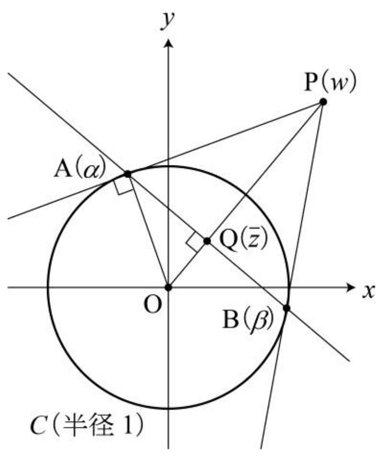


図1

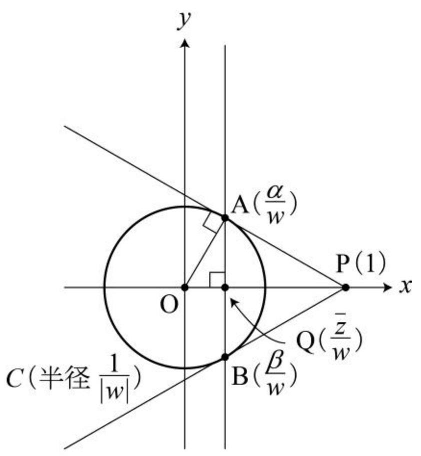


図2

以下, 図2について考える.

A($\dfrac{\alpha}{w}$), B($\dfrac{\beta}{w}$)は実軸に関して対称

であるから,

$$\frac{\beta}{w}=\overline{\left(\frac{\alpha}{w}\right)}=\frac{\bar{\alpha}}{\bar{w}} \quad \cdots ㋐$$

また, Q($\dfrac{\bar{z}}{w}$)は線分ABの中点なので,

$$\frac{\bar{z}}{w}=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{w}+\frac{\beta}{w}\right) \quad \cdots ㋑$$

さらに, P(1)とA, Qの位置関係より,

$$\frac{1-\frac{\alpha}{w}}{0-\frac{\alpha}{w}}=-\overline{\left(\frac{1-\frac{\alpha}{w}}{0-\frac{\alpha}{w}}\right)}$$

$$\therefore \frac{w-\alpha}{-\alpha}=-\overline{\left(\frac{w-\alpha}{-\alpha}\right)} \quad \cdots ㋒$$

㋐㋑より,

$$\bar{z}=\frac{w}{2}\left(\frac{\alpha}{w}+\frac{\bar{\alpha}}{\bar{w}}\right) \quad \cdots Ⓐ$$

また, ㋒より,

$$\bar{\alpha}(w-\alpha)=-\alpha(\bar{w}-\bar{\alpha})$$

$$\therefore w\bar{\alpha}+\bar{w}\alpha=2\alpha\bar{\alpha}$$

これと, 図1で$|\alpha|=(C\text{の半径})=1$であることから,

$$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{w}}+\frac{\alpha}{w}=2\frac{\alpha\bar{\alpha}}{w\bar{w}}=2\frac{|\alpha|^2}{|w|^2}=\frac{2}{|w|^2} \quad \cdots Ⓑ$$

よって, ⒶⒷより,

$$\bar{z}=\frac{w}{2}\cdot\frac{2}{|w|^2}=\frac{1}{\bar{w}}$$

が成り立つから,

$$z=\frac{1}{w} \quad \cdots(答)$$

<u>別解</u>

QとRは実軸に関して対称なので,

Q($\bar{z}$)

また, △OAQ∽△OPAより,

$$\mathrm{OQ}:\mathrm{OA}=\mathrm{OA}:\mathrm{OP}$$

$$\therefore \mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\mathrm{OA}^2$$

であり, $\mathrm{OA}=(C\text{の半径})=1$なので,

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$$

よって,

$$|w||\bar{z}|=1 \quad \cdots☆$$

また, 3点O, Q, Pはこの順に一直線に並ぶので,

$$\bar{z}=\frac{|\bar{z}|}{|w|}w \quad \cdots★$$

したがって, ☆★より,

$$\bar{z}=\frac{1}{|w|^2}w=\frac{1}{w\bar{w}}w=\frac{1}{\bar{w}}$$

が成り立つから,

$$z=\frac{1}{w} \quad \cdots(答)$$

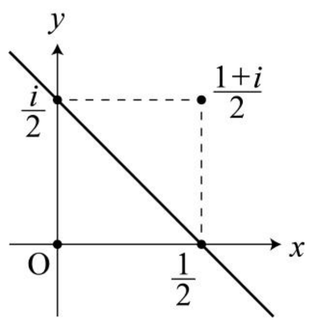
(2) (1)より,

$z=\dfrac{1}{2}$のとき, $w=2$

$z=\dfrac{i}{2}$のとき, $w=-2i$

なので,

$\gamma=2$, $\delta=-2i$



点R(z)が点$\dfrac{1}{2}$と点$\dfrac{i}{2}$を結ぶ直線上を動くとき,

$$|z|=\left|z-\frac{1+i}{2}\right|$$

を満たす. よって, 点Pの描く図形は,

$$z=\frac{1}{w}\text{かつ}|z|=\left|z-\frac{1+i}{2}\right|$$

を満たす複素数zが存在する条件で与えられる. よって,

$$\left|\frac{1}{w}\right|=\left|\frac{1}{w}-\frac{1+i}{2}\right| \quad \cdots◆$$

が点Pの描く図形の式である. ここで,

$$◆ \iff 1=\left|1-\frac{1+i}{2}w\right|\text{かつ}w\neq 0$$

$$\iff \left|\frac{2}{1+i}\right|=\left|\frac{2}{1+i}-w\right|\text{かつ}w\neq 0$$

$$\iff |w-(1-i)|=\sqrt{2}\text{かつ}w\neq 0$$

よって, 点Pは

中心$1-i$, 半径$\sqrt{2}$の円の原点を除く部分

を描く. また,

$$|0-(1-i)|=|-1+i|=\sqrt{2}$$

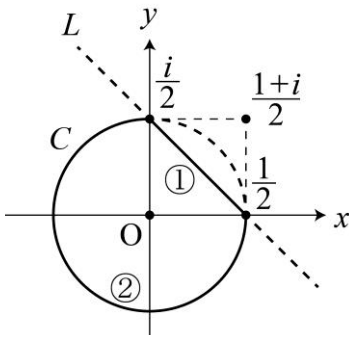
$$|\gamma-(1-i)|=|1+i|=\sqrt{2}$$

$$|\delta-(1-i)|=|-1-i|=\sqrt{2}$$

なので, Pは原点O, 点γ, 点δを通る円上にあるといえる.

(証明終り)

(3) (2)の直線を L, 原点を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円を C とする.



このとき, 点 R(z) が①上を動く条件は,

R が L 上にある

かつ

R が C の外部にない

を満たすこと, すなわち,

$$|z| = \left|z - \frac{1+i}{2}\right| \text{かつ} |z| \leqq \frac{1}{2} \quad \cdots ◎$$

を満たすこと. また, 点 R(z) が②上を動く条件は,

R が C 上にある

かつ

R が L を境にして原点 O が存在する側にある

を満たすこと, すなわち,

$$|z| = \frac{1}{2} \text{かつ} |z| \leqq \left|z - \frac{1+i}{2}\right| \quad \cdots ●$$

よって, 点 P の描く図形は,

$$z = \frac{1}{w} \text{かつ}(◎\text{または}●)$$

を満たす複素数 z が存在する条件で与えられる. よって,

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{1}{w} - \frac{1+i}{2}\right| \text{かつ} \left|\frac{1}{w}\right| \leqq \frac{1}{2}$$

または

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \frac{1}{2} \text{かつ} \left|\frac{1}{w}\right| \leqq \left|\frac{1}{w} - \frac{1+i}{2}\right|$$

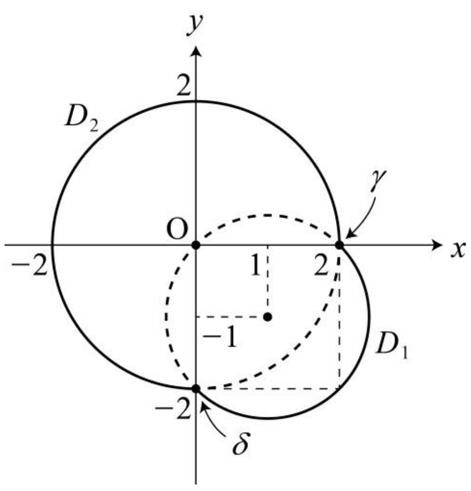
これを(2)と同様に変形して,

$$|w - (1-i)| = \sqrt{2} \text{かつ} |w| \geqq 2$$

または

$$|w| = 2 \text{かつ} |w - (1-i)| \leqq \sqrt{2}$$

を得る. よって, 点 P の描く図形は, 次の太実線部分.



ここで,

D_1 は, 中心 $1-i$, 半径 $\sqrt{2}$ の円

D_2 は, 中心 O, 半径 2 の円

である.

(解答終り)