1

問(1)(a)　小球の高さは $R(1-\cos\theta)$ なので

$$U = \underset{\sim\sim\sim}{mgR(1-\cos\theta)}$$

(b)　力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore\quad v = \sqrt{{v_0}^2 - 2gR(1-\cos\theta)}$$

(c)　$\theta = \pi$ のとき $v = 0$ となるときの初速が v_1 であるので

$$0 = \sqrt{v_1^2 - 2gR(1-\cos\pi)}$$

$$\therefore\quad v_1 = 2\sqrt{gR}$$

問(2)(a)　水平方向に慣性力 (遠心力) $m\cdot R\sin\theta\cdot\omega^2$ がはたらくことを考えて，リング円周に沿って小球にはたらく力は

$$F = mR\omega^2\sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta$$

(b)　$|\theta|$ が十分小さいとき，与えられた近似を用いて

$$F \fallingdotseq mR\omega^2\theta - mg\theta = m(R\omega^2 - g)\theta$$

$F < 0$ となればよいので

$$R\omega^2 - g < 0$$

$$\therefore\quad \omega < \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

(c)　$\omega < \omega_0$ のとき，$\theta \fallingdotseq \dfrac{x}{R}$ とすると

$$F = -m(g - R\omega^2)\cdot\frac{x}{R}$$

単振動の復元力は角振動数 Ω を用いて $F = -m\Omega^2 x$ と表せるので

$$\Omega = \sqrt{\frac{g - R\omega^2}{R}}$$

$$\therefore\quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g - R\omega^2}}$$

問(3)(a)　$\theta=\theta_0$ で $F=0$ として

$$mR\omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0-mg\sin\theta_0=0$$

$$\therefore\quad \omega=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{g}{R\cos\theta_0}}}$$

(b)　不適切なグラフ：(う)

理由：　グラフ(う)は $\theta=0$ が振動中心となる単振動を表しているが，それは問(2)の $\omega<\omega_0$ の場合であり，$\omega>\omega_0$ の場合 $\theta=0$ のまわりで $F>0$ であり復元力とならないから。

（参考）　$\theta=\theta_0$ 近傍の力を考察する。$\theta=\theta_0+\varDelta\theta$ とすると，加法定理より

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sin(\theta_0+\varDelta\theta)\\&=\sin\theta_0\cos\varDelta\theta+\cos\theta_0\sin\varDelta\theta\\&\fallingdotseq\sin\theta_0+\cos\theta_0\cdot\varDelta\theta\\\cos\theta&=\cos(\theta_0+\varDelta\theta)\\&=\cos\theta_0\cos\varDelta\theta-\sin\theta_0\sin\varDelta\theta\\&\fallingdotseq\cos\theta_0-\sin\theta_0\cdot\varDelta\theta\end{aligned}$$

問(2)(a)より，

$$\begin{aligned}F&\fallingdotseq m\{R\omega^2(\cos\theta_0-\sin\theta_0\cdot\varDelta\theta)-g\}(\sin\theta_0+\cos\theta_0\cdot\varDelta\theta)\\&=m\{R\omega^2(\cos\theta_0-\sin\theta_0\cdot\varDelta\theta)-g\}\sin\theta_0+m\{R\omega^2(\cos\theta_0-\sin\theta_0\cdot\varDelta\theta)-g\}\cos\theta_0\cdot\varDelta\theta\\&=m(R\omega^2\cos\theta_0-g)\sin\theta_0+m\left[R\omega^2\{(\cos^2\theta_0-\sin^2\theta_0)-\sin\theta_0\cos\theta_0\cdot\varDelta\theta\}-g\cos\theta_0\right]\varDelta\theta\\&\fallingdotseq m(R\omega^2\cos\theta_0-g)\sin\theta_0+m\left[R\omega^2\{(2\cos^2\theta_0-1)-0\}-g\cos\theta_0\right]\varDelta\theta\quad(\because\quad(\varDelta\theta)^2\fallingdotseq0)\\&=0+m\{R\omega^2(2\cos^2\theta_0-1)-g\cos\theta_0\}\varDelta\theta\qquad(\because\quad\text{問(3)(a)より第1項は}0)\\&=m\left\{\frac{g}{\cos\theta_0}(2\cos^2\theta_0-1)-g\cos\theta_0\right\}\varDelta\theta\qquad(\because\quad\text{問(3)(a)より}\omega\text{を消去})\\&=mg\left(\cos\theta_0-\frac{1}{\cos\theta_0}\right)\varDelta\theta\\&=-mg\frac{\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}\varDelta\theta\\&\fallingdotseq-\frac{mg\sin^2\theta_0}{R\cos\theta_0}\varDelta x'\qquad(\varDelta x'\fallingdotseq R\varDelta\theta：\theta=\theta_0\text{の位置からの微小な変位})\end{aligned}$$

$0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta_0>0$ なので，$\theta=\theta_0$ の近傍でも F は復元力となる。よって，$\theta=\dfrac{\theta_0}{2}$ で小さな初速を与えた場合は，グラフ(あ)のように $\theta=\theta_0$ のまわりで往復運動が観測できると考えられる。また，グラフ(い)は，小球に十分に大きな初速を与えてリングを周回できる場合と考えればよい。

$\boxed{2}$

問(1)(a)　電場と電位差の関係より

$$V_0 = Ed_1 \qquad \therefore \quad E = \frac{V_0}{d_1}$$

運動方程式は

$$ma = qE \qquad \therefore \quad a = \frac{qV_0}{md_1}$$

(b)　加速度 a の等加速度運動なので

$$\begin{cases} d_1 = \dfrac{1}{2}a{t_1}^2 \\ v_1 = at_1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} t_1 = \sqrt{\dfrac{2{d_1}^2}{a}} = d_1\sqrt{\dfrac{2m}{qV_0}} \\ v_1 = \sqrt{2ad_1} = \sqrt{\dfrac{2qV_0}{m}} \end{cases}$$

(c)　粒子は各極板間で運動エネルギーが qV_0 ずつ増加するので

$$\frac{1}{2}mv_n^2 = n \cdot qV_0 \qquad \therefore \quad v_n = \sqrt{n}v_1$$

［別解］

$\mathrm{D}_{n-1}\mathrm{D}_n$ 間の等加速度運動について

$$v_n^2 - v_{n-1}^2 = 2a_n d_n$$

階差数列となるので

$$v_n^2 = v_1^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} a_k d_k$$

ここで，(a)と同様に

$$a_k = \frac{qV_0}{md_k} \qquad \therefore \quad a_k d_k = \frac{qV_0}{m} = \frac{1}{2}{v_1}^2$$

$$\therefore \quad {v_n}^2 = {v_1}^2 + (n-1){v_1}^2$$

$$\therefore \quad v_n = \sqrt{n}v_1$$

(d)　各極板間の運動の平均の速さを考えると

$$\begin{cases} d_1 = \dfrac{1}{2}v_1 t_1 \\ d_n = \dfrac{1}{2}(v_{n-1} + v_n)t_1 \end{cases}$$

２式より t_1 を消去して

$$d_n = \frac{v_{n-1} + v_n}{v_1} d_1$$
$$= \underline{\left(\sqrt{n-1} + \sqrt{n}\right) d_1}$$

［別解］

$\mathrm{D}_{n-1}\mathrm{D}_n$ 間の等加速度運動について

$$d_n = v_{n-1}t_1 + \frac{1}{2}a_n{t_1}^2$$

ここで

$$\begin{cases} v_{n-1}t_1 = \sqrt{n-1}\,v_1\dfrac{2d_1}{v_1} = 2d_1\sqrt{n-1} \\ \dfrac{1}{2}a_n{t_1}^2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{qV_0}{md_n}\left(d_1\sqrt{\dfrac{2m}{qV_0}}\right)^2 = \dfrac{{d_1}^2}{d_n} \end{cases}$$

よって，

$$d_n = 2d_1\sqrt{n-1} + \frac{{d_1}^2}{d_n}$$
$${d_n}^2 - 2\sqrt{n-1}\,d_1 d_n - {d_1}^2 = 0$$
$$\therefore \quad d_n = \underline{\left(\sqrt{n-1} + \sqrt{n}\right) d_1}$$

問(2)(a)　向き：正

ローレンツ力が向心力となり円運動をするので，力が半円の中心を向くようにフレミングの左手の法則を考えればよい。

(b)　エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m{u_1}^2 = \frac{1}{2}m{u_0}^2 + qV_0 \qquad \therefore \quad u_1 = \underline{\sqrt{{u_0}^2 + \frac{2qV_0}{m}}}$$

M_1 では円運動を行うので

$$b_1 = \frac{{u_1}^2}{r} = \underline{\frac{1}{r}\left({u_0}^2 + \frac{2qV_0}{m}\right)}$$

(c)　N 周目での粒子の速さを u_N とするとエネルギーの関係式より

$$\frac{1}{2}m{u_N}^2 = \frac{1}{2}m{u_0}^2 + N\cdot qV_0$$
$$\therefore \quad u_N = \sqrt{u_0^2 + \frac{2NqV_0}{m}}$$
$$\therefore \quad T_N = \frac{2\ell + 2\pi r}{u_N} = \underline{2(\ell + \pi r)\sqrt{\frac{m}{mu_0^2 + 2NqV_0}}}$$

(d) (c)と円運動の運動方程式より

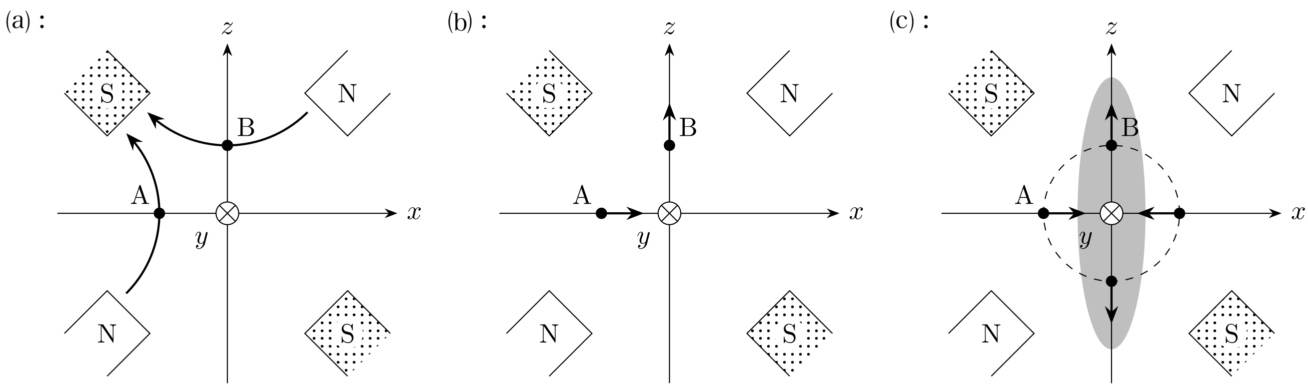
$$m\frac{{u_N}^2}{r}=qu_NB_N$$

$$\therefore\quad B_N=\frac{m}{qr}\sqrt{{u_0}^2+\frac{2NqV_0}{m}}$$

問(3)(a) 磁力線は N 極から S 極へ向かう。

(b) フレミングの左手の法則より，ローレンツ力は点 A で $+x$ 方向，点 B で $+z$ 方向となる。

(c) (b)と同様に，点 A に原点対称な x 軸上の点では $-x$ 方向，点 B に原点対称な z 軸上の点では $-z$ 方向に粒子はローレンツ力を受けるので，粒子の広がりを表す図として適当なものは (イ) 。



3

問(1)(a) 波の基本式より

$$V=f\lambda\qquad\therefore\quad \lambda=\frac{V}{f}$$

(b) $x=d$ で $F=-F_{\mathrm{R}}$ より

$$A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{d}{V}\right)\right\}=A\sin\left\{2\pi f\left(t+\frac{d-a}{V}\right)\right\}$$

位相を比べて

$$a=2d$$

反射波は反射板に対して対称な位置 $x=2d$ の音源からの波と考えることができる。

(c) 合成波を考えて

$$F+F_{\mathrm{R}}=A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{x}{V}\right)\right\}-A\sin\left\{2\pi f\left(t+\frac{x-2d}{V}\right)\right\}$$

$$=2A\sin\left\{2\pi f\left(-\frac{x}{V}+\frac{d}{V}\right)\right\}\cos\left\{2\pi f\left(t-\frac{d}{V}\right)\right\}$$

$$\therefore\quad A_{\mathrm{s}}=2A\left|\sin\frac{2\pi f}{V}(d-x)\right|$$

(d) $0 < x < d$ において $A_{\mathrm{s}} = 0$ となる点が存在すればよいので

$$2\pi\frac{V}{(d-x)} = \pi \quad \text{かつ} \quad 0 < x < d$$

$$\therefore \quad 0 < d - \frac{2f}{V}(< d) \qquad \therefore \quad d > \frac{V}{2f}$$

［別解］

定常波の節は半波長ごとに現れ，反射板は固定端であるから反射板からの距離が半波長より長ければよいので

$$d > \frac{\lambda}{2} \qquad \therefore \quad d > \frac{V}{2f}$$

問(2)(a) 観測者 P は等速運動しているので，$x = x_0 + u\varDelta t$

(b) F で $x \to x_0 + u\varDelta t$，$t \to t_0 + \varDelta t$ として

$$F' = A\sin\left\{2\pi f\left(t + \varDelta t - \frac{x + u\varDelta t}{V}\right)\right\}$$

(c) (b)より

$$F' = A\sin\left\{2\pi f\left(t - \frac{x}{V}\right) + 2\pi f\cdot\frac{V-u}{V}\varDelta t\right\}$$

F との位相差を考えると，$\varDelta t = \dfrac{1}{f'}$ で位相が 2π 進むので

$$2\pi f\cdot\frac{V-u}{V}\cdot\frac{1}{f'} = 2\pi \qquad \therefore \quad f' = \left(1 - \frac{u}{V}\right)f$$

問(3)(d) 余弦定理より

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{r_0^2 + (u\varDelta t)^2 - 2r_0u\varDelta t\cos(\pi - \theta_0)} \\ &= r_0\left(1 + \frac{2u\varDelta t\cos\theta_0}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (\because \quad (u\varDelta t/r_0)^2 \fallingdotseq 0) \\ &\fallingdotseq r_0\left(1 + \frac{u\varDelta t\cos\theta_0}{r_0}\right) \qquad (\because \quad 1 \gg u\varDelta t\cos\theta_0/r_0) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad r = r_0 + u\varDelta t\cos\theta_0$$

問(4) F_r で $r \to r_0 + u\varDelta t\cos\theta_0$，$t \to t_0 + \varDelta t$ として

$$F_r{}' = A\sin 2\pi f\left(t_0 + \varDelta t - \frac{r_0 + u\varDelta t\cos\theta_0}{V}\right)$$

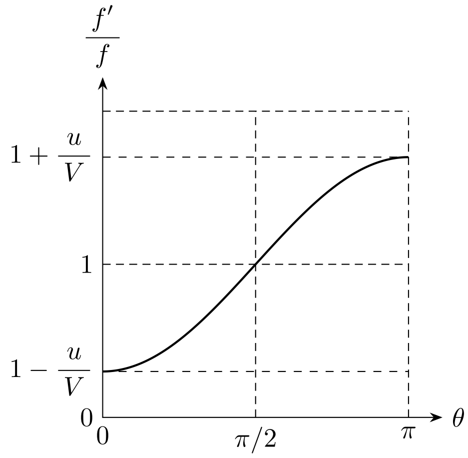
問(5)　問(4)より

$$F_r{}' = A\sin\left\{2\pi f\left(t_0 - \frac{r_0}{V}\right) + 2\pi f\left(1 - \frac{u\cos\theta_0}{V}\right)\varDelta t\right\}$$

F_r との位相差を考えると，$\varDelta t = \dfrac{1}{f'}$ で位相が 2π 進むので

$$2\pi f\left(1 - \frac{u\cos\theta}{V}\right)\frac{1}{f'} = 2\pi$$

$$\therefore \quad f' = \left(1 - \frac{u\cos\theta}{V}\right)f$$



$\dfrac{f'}{f}$ の角度 θ に対する変化を表すグラフは右図となる。