$\boxed{1}$

問(1)(a)　ばねの弾性エネルギーより

$$\therefore \quad E=\frac{1}{2}kd^2$$

(b)　力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}kd^2=\frac{1}{2}MV_0^2 \qquad \therefore \quad V_0=d\sqrt{\frac{k}{M}}$$

反発係数の式より

$$V_1=eV_0=ed\sqrt{\frac{k}{M}}$$

(c)　角振動数 $\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ の単振動の周期の半分の時間であるので

$$T=\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

問(2)(a)　$\mu=\mu_{\mathrm{C}}$ のときの加速度を a_{C} として運動方程式を立式すると，静止摩擦力は最大値をとるので

$$\begin{cases} ma_{\mathrm{C}}=-\mu_{\mathrm{C}}mg \\ Ma_{\mathrm{C}}=-kd+\mu_{\mathrm{C}}mg \end{cases}$$

2 式より a_{C} を消去して

$$\mu_{\mathrm{C}}=\frac{kd}{(M+m)g}$$

(b)　台車と小物体の運動方程式を立式すると，小物体は台に対して左向きに運動するので

$$\begin{cases} \text{台車：} & Ma=-kx-\mu'mg \\ \text{小物体：} & ma'=\mu'mg \end{cases}$$

(c)　台車の運動方程式より

$$Ma=-k\left(x+\frac{\mu'mg}{k}\right)$$

これは

$$\text{振動中心：}\ x_0=-\frac{\mu'mg}{k}\ ,\quad \text{角振動数：}\ \omega=\sqrt{\frac{k}{M}}$$

の単振動を示す。

問(3)(a)　台車と小物体の加速度をそれぞれ a，a' として運動方程式を立式すると

$$\begin{cases} \text{台車：} & Ma = -\mu' mg \\ \text{小物体：} & ma' = \mu' mg \end{cases}$$

よって，台車と小物体はそれぞれ加速度 $a = -\dfrac{\mu' mg}{M}$，$a' = \mu' g$ で等加速度運動することがわかるので

$$\begin{cases} V = ev_0 + at = \underline{ev_0 - \mu' \dfrac{m}{M} gt} \\ v = -v_0 + a't = \underline{-v_0 + \mu' gt} \end{cases}$$

(b)　速度 V が $-ev_0$ となるとき壁と 2 回目の衝突をするので

$$-ev_0 = ev_0 - \mu' \frac{m}{M} gT'$$

$$\therefore \quad T' = \underline{\frac{2eMv_0}{\mu' mg}}$$

(c)　2 回目の衝突の直前に，台車の速度が小物体の速度より大きければよいので

$$-v_0 + \mu' gT' < -ev_0$$

$$\left(1 + \frac{2M}{m}\right) e < 1$$

$$\therefore \quad e < \underline{\frac{m}{2M + m}} \quad (= e_{\mathrm{C}})$$

(d)　衝突の度に台車の速さは e 倍となるので，衝突の時間間隔も e 倍となる。無限等比級数を考えて

$$T'' = T' + eT' + e^2 T' + \cdots$$

$$= \underline{\frac{1}{1-e} T'} \quad (\because \quad |e| < 1)$$

ただし，絶対値が 1 より小さな公比 r，初項 a の無限等比級数の公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}$ を用いた。

2

問(1)(a)　コンデンサー $\mathrm{C_A}$ には電圧 V_0 がかかるので，$\mathrm{C_A}$ の容量を C_0 として

$$q_1 = C_0 V_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\varepsilon_0 \frac{l^2}{d} V_0}$$

電池を通過した電気量は q_1 であるから

$$W_1 = q_1 V_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\varepsilon_0 \frac{l^2}{d} V_0^2}$$

(b)　電位の関係式より

$$V_0 = r i_1 \qquad \therefore \quad i_1 = \underset{\sim\sim}{\frac{V_0}{r}}$$

(c)　$\mathrm{C_B}$ の電気容量は $\mathrm{C_A}$ と同じ C_0 なので，最終的にそれぞれに蓄えられる電荷は $\dfrac{q_1}{2}$ となる。エネルギー保存則より，求めるジュール熱は静電エネルギーの減少量に一致するので

$$h_1 = \frac{q_1^2}{2C_0} - \frac{\left(\frac{q_1}{2}\right)^2}{2C_0} \times 2 = \frac{1}{4} C_0 V_0^2 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{4} \varepsilon_0 \frac{l^2}{d} V_0^2}$$

問(2)(a)　電位の関係式より

$$\begin{cases} V(t) = r i_1(t) + V_1(t) \\ V(t) = r i_1(t) + r i_2(t) + V_2(t) \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} V_1(t) = \underset{\sim\sim\sim}{V(t) - r i_1(t)} \\ V_2(t) = \underset{\sim\sim\sim}{V(t) - r i_1(t) - r i_2(t)} \end{cases}$$

(b)　(a)より

$$V_1(t) = V(t) - r i_1(t) \qquad \therefore \quad \frac{q_1}{C_0} = V_0 + at - rI_1$$

変化分を考えると

$$\Delta q_1 = a C_0 \Delta t = \underset{\sim\sim\sim}{\varepsilon_0 \frac{l^2}{d} a \Delta t}$$

また，(a)より

$$V_2(t) = V(t) - r i_1(t) - r i_2(t) \qquad \therefore \quad \frac{q_2}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} C_0} = V_0 + at - rI_1 - rI_2$$

変化分を考えると

$$\Delta q_2 = a \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} C_0 \Delta t = \underset{\sim\sim\sim}{\varepsilon \frac{l^2}{d} a \Delta t}$$

(c)　電荷と電流の関係より

$$I_2 = \frac{\Delta q_2}{\Delta t} = \varepsilon\frac{l^2}{d}a\ ,\quad I_1 = \frac{\Delta q_1}{\Delta t} + I_2 = (\varepsilon_0 + \varepsilon)\frac{l^2}{d}a$$

問(3)(a)　時刻 t での $\mathrm{C_B}$ の電気容量を C として，真空部分と誘電体部分の並列合成を考えると

$$C = \varepsilon_0\frac{(l - vt)l}{d} + \varepsilon\frac{vtl}{d}$$

変化分を考えると

$$\Delta c = (\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{vl}{d}\Delta t \qquad \therefore\ \ b = (\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{vl}{d}$$

(b)　電源の起電力，電流が一定であり，$\Delta c > 0$ より時間と共に $\mathrm{C_B}$ の容量が大きくなるので，$\mathrm{C_B}$ の電荷も増える必要がある。よって I_4 の向きは (い) となる。

(c)　回路の電位の関係を考えると，$\mathrm{C_A}$ に電流が流れ込むことはないので $I_3 = I_4 = I$ とおける。回路の電位の関係より，$\mathrm{C_B}$ に蓄えられる電荷を q として

$$\frac{q}{C} = V_0 - rI - rI \qquad \therefore\ \ q = (V_0 - 2rI)(C_0 + bt)$$

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = b(V_0 - 2rI) \quad \cdots(*) \qquad \therefore\ \ I_3 = I_4 = I = \frac{bV_0}{1 + 2br}$$

(d)　回路系のエネルギーの収支より，コンデンサーの静電エネルギーの和を U として

$$\Delta U = V_0 I\Delta t + Fv\Delta t - 2rI^2\Delta t$$

電気量・電圧が一定である $\mathrm{C_A}$ の静電エネルギーは変化しないので，ΔU は $\mathrm{C_B}$ の静電エネルギー変化に一致するため

$$\Delta U = \frac{1}{2}\Delta C(V_0 - 2rI)^2 = \frac{1}{2}b(V_0 - 2rI)^2\Delta t$$

$$\therefore\ \ Fv = \frac{1}{2}b(V_0 - 2rI)^2 + 2rI^2 - V_0 I$$

$$= \frac{1}{2(1 + 2br)^2}\cdot bV_0^2 + \frac{2br}{(1 + 2br)^2}bV_0^2 - \frac{1}{1 + 2br}bV_0^2 = -\frac{1}{2(1 + 2br)^2}bV_0^2$$

よって，$F = -\dfrac{1}{2v(1 + 2br)^2}bV_0^2$ で，その向きは紙面右向き。

【別解】

$(*)$ 式より，$\dfrac{I}{b} = V_0 - 2rI$ に着目して I で整理してから求めてもよい。仕事率の関係は同様に

$$Fv = \frac{1}{2}b\left(\frac{I}{b}\right)^2 + \underbrace{2rI^2 - V_0 I}_{-(I/b)\cdot I} = -\frac{I^2}{2b}$$

$$\therefore\ \ F = -\frac{b}{2v}\left(\frac{I}{b}\right)^2 = -\frac{b}{2v}\left(\frac{V_0}{1 + 2br}\right)^2$$

$\boxed{3}$

問(1)(a)　図 3 より，腹の間隔の 2 倍である $\dfrac{4}{5}L$ が一波長となる閉管の共鳴である。波の基本式より

$$V = f \cdot \frac{4}{5}L \qquad \therefore \quad f = \frac{5V}{4L}$$

D_1 の運動によるドップラー効果を考えて

$$f = \frac{V}{V+v_1} f_S \qquad \therefore \quad f_S = \frac{V+v_1}{V} \cdot \frac{5V}{4L} = \frac{5(V+v_1)}{4L}$$

(b)　開管の n 倍振動の共鳴における波長は $\dfrac{2L}{n}$ なので，(a)と同様に

$$\begin{cases} V = f_n \cdot \dfrac{2L}{n} \\ f_n = \dfrac{V}{V-v_1} f_S \end{cases} \qquad \therefore \quad f_S = \frac{V-v_1}{V} \cdot \frac{nV}{2L} = \frac{n(V-v_1)}{2L}$$

(c)　(a)，(b)の f_S の一致より

$$\frac{5(V+v_1)}{4L} = \frac{n(V-v_1)}{2L} \qquad \therefore \quad v_1 = \frac{2n-5}{2n+5}V$$

(d)　$0 < \dfrac{v_1}{V} \leqq \dfrac{2}{13}$ であるから，(c)の結果を用いて

$$0 < \frac{2n-5}{2n+5} \leqq \frac{2}{13} \qquad \therefore \quad \frac{5}{2} < n \leqq \frac{75}{22} \quad (\fallingdotseq 3.4)$$

よって，$n = 3$ の 3 倍振動が適当である。このとき，

$$v_1 = \frac{1}{11}V \quad (\because \ \ (c)) \qquad \therefore \quad f_S = \frac{5}{4L} \cdot \frac{12}{11}V = \frac{15V}{11L} \quad (\because \ \ (a))$$

問(2)(a)　時刻 t_1 と t_2 はそれぞれ

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{\ell_1}{V} + t_0 \\ t_2 = \Delta t + \dfrac{\ell_2}{V} + t_0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \Delta T = t_2 - t_1 = \Delta t - \frac{\ell_1 - \ell_2}{V}$$

(b)　$\triangle \mathrm{OPP'}$ について余弦定理より

$$\ell_2{}^2 = \ell_1{}^2 + (v_1 \Delta t)^2 - 2\ell_1 v \Delta t \cdot \cos \angle \mathrm{OPP'}$$

$$\therefore \quad \ell_2 = \sqrt{\ell_1{}^2 + (v_1 \Delta t)^2 - 2\ell_1 v \Delta t \cdot \cos\theta} \qquad (\because \ \ \angle \mathrm{OPP'} = \theta)$$

(c) (b)の結果に近似を用いて

$$\ell_2 \fallingdotseq \left({\ell_1}^2 + 0 - 2\ell_1 v\varDelta t\cdot\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \left(\because \quad (v_1\varDelta t)^2 \fallingdotseq 0\right)$$

$$= \ell_1\left(1 - \frac{2v\varDelta t\cdot\cos\theta}{\ell_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\fallingdotseq \ell_1\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2v\varDelta t\cdot\cos\theta}{\ell_1}\right) \qquad \left(\because \quad \left|\frac{2v\varDelta t\cdot\cos\theta}{\ell_1}\right| \ll 1\right)$$

$$\therefore \quad \ell_1 - \ell_2 = v_1\varDelta t\cos\theta$$

$$\varDelta T = \varDelta t - \frac{v_1\varDelta t\cos\theta}{V} = \left(1 - \frac{v_1\cos\theta}{V}\right)\varDelta t \qquad (\because \quad \text{(a)})$$

(d) 点 P 側と点 O 側での振動回数の一致から

$$f_{\mathrm{P}}\varDelta T = f_{\mathrm{S}}\varDelta t$$

$$\therefore \quad f_{\mathrm{P}} = \frac{\varDelta t}{\varDelta T}f_{\mathrm{S}} = \left(1 - \frac{v_1\cos\theta}{V}\right)^{-1}f_{\mathrm{S}} = \frac{V}{V - v_1\cos\theta}f_{\mathrm{S}} \qquad (\because \quad \text{(c)})$$

問(3)(a) $\mathrm{D_2}$ が $\mathrm{QQ'}$ を運動する時間と音波が $\mathrm{PQ'}$ を伝わる時間は等しいので

$$\frac{\mathrm{QQ'}}{v_2} = \frac{2\ell_1\cos\theta + \mathrm{QQ'}}{V} \qquad \therefore \quad \mathrm{QQ'} = \frac{2v_2}{V - v_2}\ell_1\cos\theta$$

z 軸上，点 P と点 Q の中点を点 O′ とすると

$$\tan\theta' = \frac{\mathrm{OO'}}{\mathrm{O'Q} + \mathrm{QQ'}}$$

$$= \frac{\ell_1\sin\theta}{\ell_1\cos\theta + \dfrac{2v_2}{V - v_2}\ell_1\cos\theta} = \frac{\tan\theta}{1 + \dfrac{2v_2}{V - v_2}} = \frac{V - v_2}{V + v_2}\tan\theta$$

(b) $\mathrm{D_2}$ が観測する $\mathrm{D_1}$ からの音波の振動数を f' とすると

$$f' = \frac{V - v_2}{V - v_1}f_{\mathrm{S}}$$

$\mathrm{D_2}$ は速さ $v_2\cos\theta'$ で遠ざかる振動数 f' の音波を発する音源とみなせるので

$$f_{\mathrm{Q}} = \frac{V}{V + v_2\cos\theta'}f' = \frac{V}{V + v_2\cos\theta'}\,\frac{V - v_2}{V - v_1}f_{\mathrm{S}}$$

(c) $\mathrm{D_2}$ からの音波の振動数は，(b)の結果で $v_1 = 0$，$\theta' = \dfrac{\pi}{3}$ として

$$f_{\mathrm{Q}} = \frac{V - v_2}{V + \dfrac{1}{2}v_2}f_{\mathrm{S}} \quad (< f_{\mathrm{S}})$$

である。これと $\mathrm{D_1}$ からの音波の振動数 f_{S} との差により，うなりを観測するので

$$N = f_{\mathrm{S}} - f_{\mathrm{Q}} = \frac{3v_2}{2V + v_2}f_{\mathrm{S}} \qquad \therefore \quad v_2 = \frac{2N}{3f_{\mathrm{S}} - N}V$$