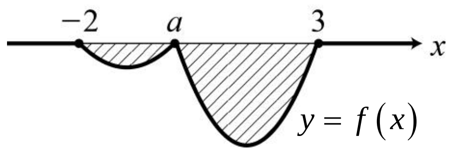
1

(1) $-2 \leqq a \leqq 3$ のとき，

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x<-2)\\(x-a)(x+2) & (-2\leqq x\leqq a)\\2(x-a)(x-3) & (a\leqq x\leqq 3)\\0 & (x>3)\end{cases}$$

に対して，$y=f(x)$ のグラフは次図の太実線部分．



よって，求める面積 $S(a)$ は，図の斜線部分の面積で，

$$S(a)=\int_{-2}^{a}\{-(x-a)(x+2)\}dx+\int_{a}^{3}\{-2(x-a)(x-3)\}dx$$

$$=\frac{1}{6}\{a-(-2)\}^3+\frac{2}{6}(3-a)^3 \quad \cdots ★$$

$$=\frac{1}{6}(a^3+6a^2+12a+8)+\frac{1}{3}(27-27a+9a^2-a^3)$$

$$=-\frac{1}{6}a^3+4a^2-7a+\frac{31}{3} \quad \cdots(\text{答})$$

(2) (1)より，

$$S'(a)=-\frac{1}{2}a^2+8a-7$$

$$=-\frac{1}{2}(a^2-16a+14)$$

$$=-\frac{1}{2}\{a-(8-5\sqrt{2})\}\{a-(8+5\sqrt{2})\}$$

であり，$1<\sqrt{2}<2$ より，

$-2<8-5\sqrt{2}<3$，　$13<8+5\sqrt{2}$

なので，次表を得る．

a	-2	$\cdots$	$8-5\sqrt{2}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

また，★を利用して，

$$S(-2)=\frac{2}{6}\cdot 5^3=\frac{125}{3},\quad S(3)=\frac{1}{6}\cdot 5^3=\frac{125}{6}$$

なので，最大値を与える a の値は，

$a=-2$ $\cdots$(答)

また，最小値を与える a の値は，

$a=8-5\sqrt{2}$ $\cdots$(答)

2

n は正の整数，a，b は 0 以上の整数．

(1)　$n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ に対して，

$$2^n+n^2+8<3^n \quad \cdots Ⓐ$$

が成り立つことを数学的帰納法により示す．

(ア)　$2^3+3^2+8=25$

$3^3=27$

なので，$n=3$ のとき，Ⓐは成り立つ．

(イ)　$n=k$（k は 3 以上の整数）のとき，Ⓐが成り立つとすると，

$$2^k+k^2+8<3^k \quad \cdots ①$$

このとき，$A=2^{k+1}+(k+1)^2+8-3^{k+1}$ とおくと，

$$A=2^{k+1}+(k+1)^2+8-3\cdot 3^k$$

とかけるから，①より，

$$A<2^{k+1}+(k+1)^2+8-3(2^k+k^2+8)$$

$$\therefore A<-2^k-2k(k-1)-15$$

とかけて，k は 3 以上の整数より，

$$-2^k<0,\ -2k(k-1)<0$$

であるから，

$$A<-2^k-2k(k-1)-15<0$$

よって，

$$2^{k+1}+(k+1)^2+8<3^{k+1}$$

といえ，$n=k+1$ のとき，Ⓐは成り立つ．

以上(ア)(イ)より，$n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ のとき，Ⓐは成り立つ．

（証明終り）

(2)　(1)より，

$$2^n+n^2+8 \geqq 3^n \quad \cdots Ⓑ$$

となるためには，

$$n=1,\ 2$$

が必要である．

(ア)　$n=1$ のとき，

$$2^1+1^2+8=11,\quad 3^1=3$$

なので，Ⓑを満たす．

(イ)　$n=2$ のとき，

$$2^2+2^2+8=16,\quad 3^2=9$$

なので，Ⓑを満たす．

以上より，求める n は，

$$n=1,\ 2 \quad \cdots（答）$$

(3)　$$2^n+n^2+8=3^n+an+b \quad \cdots Ⓒ$$

を満たすとき，n は正の整数，a，b は 0 以上の整数より，

$$2^n+n^2+8 \geqq 3^n$$

であるから，

$$n=1,\ 2$$

が必要である．

(ア)　$n=1$ のとき，

$$Ⓒ \iff 11=3+a+b \iff a+b=8$$

なので，

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i \\ 8-i \end{pmatrix} \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$$

(イ)　$n=2$ のとき，

$$Ⓒ \iff 16=9+2a+b \iff 2a+b=7$$

なので，

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

以上より，求める組$(a,\ b,\ n)$は，$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8$ として，

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i \\ 8-i \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \cdots（答）$$

の 13 個がすべてである．

3

$C : x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$　（$a \neq 0$　）
$L : -4x + 3y + a = 0$
$M : 3x + 4y - 7a = 0$

(1)　L と M の交点は，

$-4x + 3y + a = 0$ かつ $3x + 4y - 7a = 0$
$\therefore (x,\ y) = (a,\ a)$

これが，C 上にある条件は，

$a^2 - 2a \cdot a + a^2 - 4a + 4 = 0$
$\therefore a = 1$　…(答)

(2)　C は，

$(x - a)^2 + (y - 2)^2 = a^2$

とかけるので，

中心 $(a,\ 2)$，半径 $|a|$ の円

よって，C と L が異なる 2 つの共有点をもつ条件は，

(C の中心と L の距離) < (C の半径)

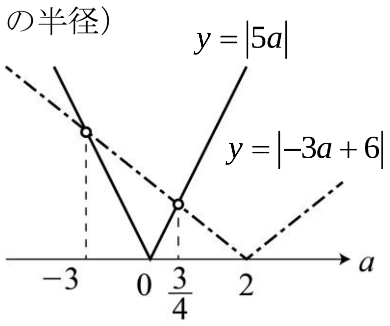
$$\therefore \frac{|-4a + 3 \cdot 2 + a|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} < |a|$$

これを整理して，

$|-3a + 6| < |5a|$

よって，右のグラフより，

$a < -3$ または $\frac{3}{4} < a$　…(答)



(3)　(2)と同様にして，C と M が異なる 2 つの共有点をもつ条件は，

$$\frac{|3a + 4 \cdot 2 - 7a|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} < |a|$$

$\therefore |-4a + 8| < |5a|$

となるから，(2)と同様にグラフを利用して，

$a < -8$ または $\frac{8}{9} < a$

である．以上より，異なる共有点の個数について，次表を得る．

a	$\cdots$	-8	$\cdots$	-3	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$
C と L	2	2	2	1	0	1	2	2	2
C と M	2	1	0	0	0	0	0	1	2

これと(1)より，

$a = 1 > \frac{8}{9}$ のときのみ，L と M の交点が C 上にある

といえることから，求める a の値は，

$a = -8,\ \frac{8}{9},\ 1$　…(答)

4

$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,　$\vec{p}=s\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

(1)　条件より，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2s-t\\-s+2t\end{pmatrix}$$

なので，

$$x+y=(2s-t)+(-s+2t)=s+t$$

また，$s+t=6$ であるから，

$$x+y=6\quad\cdots(\text{答})$$

(2)　$\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$ となる条件は，

$$\begin{cases}2s-t=0\\-s+2t=6\end{cases}$$

$\therefore (s,\ t)=(2,\ 4)$

よって，求める確率は，

6 回硬貨を投げて，表が 2 回，裏が 4 回出る確率

であり，

$${}_6\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{15}{64}\quad\cdots(\text{答})$$

(3)　条件より，$(s,\ t)$ の値は，

$$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$$

のいずれかで他にはない．

$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角 $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ が $\frac{\pi}{6}$ 以下となる条件は，

$$\cos\theta\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\cdots\bigstar$$

を満たすこと．ここで，

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=3(2s-t)+(-s+2t)=5s-t$$

なので，★が成り立つとき，

$$5s-t>0$$

が必要なので，

$$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$$

が★を満たし得る．それぞれについて，$\vec{p}$ を調べると，

$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ のとき，$\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ のとき，$\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ のとき，$\vec{p}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ のとき，$\vec{p}=\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ のとき，$\vec{p}=\begin{pmatrix}12\\-6\end{pmatrix}$

となり，それぞれについて，$\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}$ の値を調べると，

$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ のとき，$\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\frac{1}{\sqrt{10}}<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ のとき，$\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\frac{2}{\sqrt{5}}>\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ のとき，$\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\frac{3}{\sqrt{10}}>\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ のとき，$\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\frac{4}{5}<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ のとき，$\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$

となる．よって，★を満たすのは，

$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ のとき

で他にはない．よって，求める確率は，

$$({}_6\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_4)\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{35}{64}\quad\cdots(\text{答})$$