1

$f(x)=x^2-2ax+4a^2\ (a>0)$について,

$$f(x)=(x-a)^2+3a^2$$

とかけるから, その頂点 A は,

$$\mathrm{A}(a,\ 3a^2)$$

(1) 直線 OA は,

$$y=3ax$$

とかけるから, 直線 OA と$C: y=f(x)$の交点の x 座標は,

$$f(x)=3ax$$

$$\therefore (x-a)(x-4a)=0$$

を満たすから,

$$\mathrm{P}(4a,\ 12a^2)$$

したがって,

$$p=4a \quad \cdots(答)$$

また, 点 $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$における$C: y=f(x)$の接線は,

$$y-f(q)=f'(q)(x-q)$$

$$\therefore y=(2q-2a)x-q^2+4a^2$$

これが原点を通る条件を考えて,

$$0=(2q-2a)\cdot 0-q^2+4a^2$$

$$\therefore q^2=4a^2$$

いま, $a>0$, $q>0$なので,

$$q=2a \quad \cdots(答)$$

また, このとき,

$$p-q=2a>0$$

なので, $p>q$もいえる.

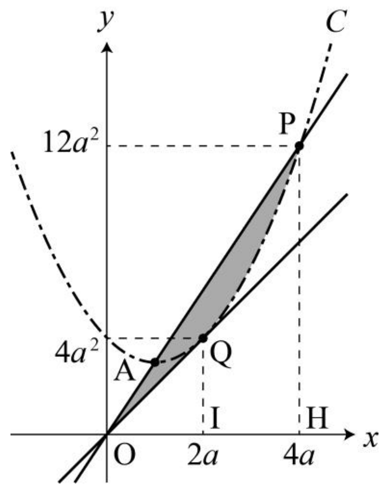
(解答終り)

(2) (1)の議論より, 求める面積 S は, 図の灰色部分の面積. ここで,

$$\mathrm{H}(4a,\ 0),\ \mathrm{I}(2a,\ 0)$$

である. したがって,

$$S=\triangle\mathrm{OPH}-\triangle\mathrm{OQI}-\int_{2a}^{4a} f(x)\,dx$$



ここで,

$$\triangle\mathrm{OPH}=\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 12a^2=24a^3$$

$$\triangle\mathrm{OQI}=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 4a^2=4a^3$$

$$\int_{2a}^{4a} f(x)\,dx=\int_{2a}^{4a}\left(x^2-2ax+4a^2\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+4a^2x\right]_{2a}^{4a}=\frac{44a^3}{3}$$

なので,

$$S=\frac{16a^3}{3} \quad \cdots(答)$$

(3) (2)より, $S=\dfrac{2}{3}$となる条件は,

$$\frac{16a^3}{3}=\frac{2}{3}$$

いま, $a>0$なので,

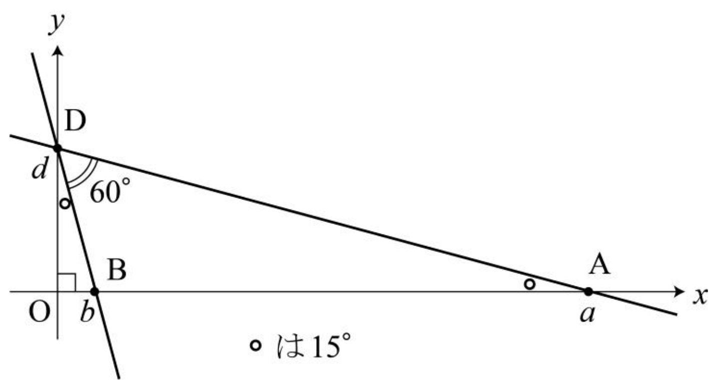
$$a=\frac{1}{2} \quad \cdots(答)$$

2

(1) 加法定理を考えて，

$$\begin{aligned}\tan 75^\circ &= \tan\left(30^\circ + 45^\circ\right)\\ &= \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1-\tan 30^\circ \tan 45^\circ}\\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\\ &= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}\\ &= 2+\sqrt{3} \quad \cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(2)



条件より，上の図を得て，直角三角形 OAD に着目して，

$$\tan 75^\circ = \frac{a}{d}$$

$$\therefore a = \left(2+\sqrt{3}\right)d \quad \cdots ㋐$$

また，直角三角形 OBD に着目して，

$$\tan 75^\circ = \frac{d}{b}$$

$$\therefore b = \left(2-\sqrt{3}\right)d \quad \cdots ㋑$$

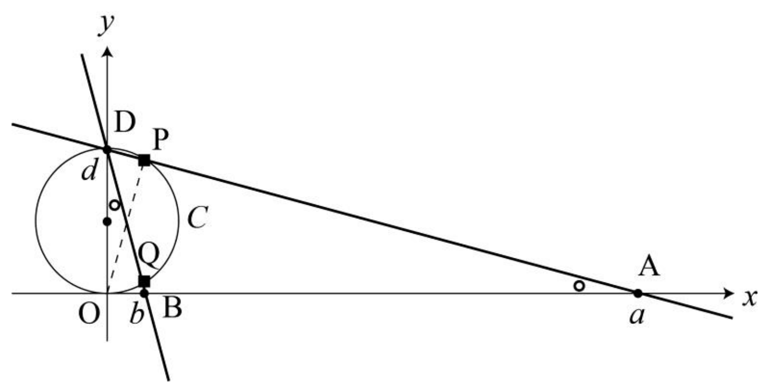
さらに，$AB = 6$ より，

$$a - b = 6 \quad \cdots ㋒$$

以上，㋐㋑㋒より，

$$d = \sqrt{3},\ (a,\ b) = (2\sqrt{3}+3,\ 2\sqrt{3}-3) \quad \cdots(\text{答})$$

(3)



△AOP と△ADO において，

$$\angle OAP = \angle DAO\ (\text{共通}) \quad \cdots ㋓$$

また，点 P は，線分 OD を直径とする円周 C 上にあるから，

$$\angle OPA = 90^\circ = \angle DOA \quad \cdots ㋔$$

㋓㋔より，

$$\triangle AOP \backsim \triangle ADO$$

よって，

$$AO : AD = AP : AO$$

$$\therefore AP \cdot AD = AO^2$$

同様に，

$$\triangle BOQ \backsim \triangle BDO$$

もいえるので，

$$BO : BD = BQ : BO$$

$$\therefore BQ \cdot BD = BO^2$$

（証明終り）

(4) (3)より，

$$AP = \frac{AO^2}{AD},\quad BQ = \frac{BO^2}{BD}$$

なので，

$$AP = \frac{AO^2 \cdot BO^2}{AD \cdot BD}$$

ここで，

$$AO^2 = a^2,\quad BO^2 = b^2$$

$$AD \cdot BD = \sqrt{\left(a^2+d^2\right)\left(b^2+d^2\right)}$$

なので，

$$AP \cdot BQ = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2b^2+\left(a^2+b^2\right)d^2+d^4}}$$

いま，(2)の結果より，

$$a^2b^2 = \left(ab\right)^2 = 3^2$$

$$a^2 + b^2 = 42$$

$$d^2 = 3$$

なので，

$$AP \cdot BQ = \frac{3^2}{\sqrt{3^2+42\cdot 3+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{1+14+1}} = \frac{3}{4} \quad \cdots(\text{答})$$

3

(1) $t>1$，$x>0$ に対して，

$$x>\frac{1}{\sqrt{t}-1} \quad \cdots Ⓐ$$

$$x \geqq 2\log_t x \quad \cdots Ⓑ$$

をともに満たすとき，

$$T=x+1-2\log_t(x+1)$$

について，Ⓑより，

$$T \geqq 2\log_t x+1-2\log_t(x+1)$$

$$\therefore T \geqq 2\log_t \frac{x\sqrt{t}}{x+1} \quad \cdots ㋐$$

が成り立つ．さらに，Ⓐにおいて，$\sqrt{t}-1>0$ なので，

$$\sqrt{t}-1>\frac{1}{x}$$

$$\therefore \sqrt{t}>\frac{x+1}{x}$$

がいえる．したがって，$x>0$ も考えて，

$$\frac{x\sqrt{t}}{x+1}>\frac{x\cdot\frac{x+1}{x}}{x+1}=1 \quad \cdots ㋑$$

が成り立つ．以上㋐㋑および $t>1$ より，

$$T>2\log_t 1=0$$

といえて，

$$x+1>2\log_t(x+1)$$

が示される

（証明終り）

(2) $n \leqq 2\log_2 n$ （n は正の整数） $\cdots$★

について，

$$2\log_2 1=0$$

$$2\log_2 2=2$$

$$2\log_2 3=\log_2 9>\log_2 8=3$$

$$2\log_2 4=4$$

なので，

$n=1$ のとき，★は成り立たない．

$n=2$，3，4 のとき，★は成り立つ．

以下，$n=5$，6，7，$\cdots$ に対して，

$$n>2\log_2 n \quad \cdots◆$$

となることを数学的帰納法により示す．

(ア) $2\log_2 5=\log_2 25<\log_2 32=5$

なので，$n=5$ のとき，◆は成り立つ．

(イ) $n=k$（k は 5 以上の整数）のとき，◆が成り立つとすると，

$$k>2\log_2 k \quad \cdots ①$$

また，$k \geqq 5$ より，

$$k>\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1 \quad \cdots ②$$

よって，①②より，(1)の(a)(b)で $t=2$ としたものが成り立つ．したがって，(1)の結論を利用できて，

$$k+1>2\log_2(k+1)$$

がいえる．よって，$n=k+1$ のとき，◆が成り立つ．

以上(ア)(イ)より，$n=5$，6，7，$\cdots$ のとき，◆が成り立つ．

したがって，

$n \geqq 5$ のとき，★は成り立たない．

以上より，★をみたす正の整数は，

$n=2$，3，4 $\cdots$（答）

ですべてである．

4

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots☆$$

で定められる整数 a_n，b_n について．

(1)
$$\begin{aligned} a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2} &= \left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} \\ &= \left(1+\sqrt{2}\right)^n\left(1+\sqrt{2}\right) \\ &= \left(a_n+b_n\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) \\ &= \left(a_n+2b_n\right)+\left(a_n+b_n\right)\sqrt{2} \end{aligned}$$

ここで，$b_{n+1} \neq a_n + b_n$ とすると，

$$\sqrt{2} = \frac{a_n+b_n-a_{n+1}}{b_{n+1}-a_n-b_n} = \frac{(\text{整数})}{(\text{整数})} = (\text{有理数})$$

となり，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．よって，

$$b_{n+1} = a_n + b_n$$

このとき，

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n$$

以上より，

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots(\text{答}) \quad \cdots①$$

また，

$$(a_1,\ b_1) = (1,\ 1) \quad \cdots②$$

なので，

$(a_2,\ b_2) = (3,\ 2)$
$(a_3,\ b_3) = (7,\ 5)$
$(a_4,\ b_4) = (17,\ 12)$
$(a_5,\ b_5) = (41,\ 29)$
$(a_6,\ b_6) = (99,\ 70)$

となる．よって，

$$(b_4,\ b_5,\ b_6) = (12,\ 29,\ 70) \quad \cdots(\text{答})$$

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2} \quad \cdots★$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(ア) $\left(1-\sqrt{2}\right)^1 = 1-\sqrt{2}$

また，②より，

$$a_1 - b_1\sqrt{2} = 1-\sqrt{2}$$

なので，$n=1$ のとき，★は成り立つ．

(イ) $n=k$（k は自然数）のとき，★が成り立つとすると，

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^k = a_k - b_k\sqrt{2} \quad \cdots③$$

このとき，

$$\begin{aligned} \left(1-\sqrt{2}\right)^{k+1} &= \left(1-\sqrt{2}\right)^k\left(1-\sqrt{2}\right) \\ &= \left(a_k-b_k\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right) \quad (\because ③) \\ &= a_k+2b_k-\left(a_k+b_k\right)\sqrt{2} \\ &= a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{2} \quad (\because ①) \end{aligned}$$

とできて，$n=k+1$ のとき，★は成り立つ．

以上(ア)(イ)より，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，★が成り立つ．

(3) ☆－★より，

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n = 2b_n\sqrt{2}$$

そこで，$(\alpha,\ \beta) = (1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2})$ とおくと，

$$b_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{2}}$$

となる．よって，$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ のとき，

$$\begin{aligned} b_{n+1}b_{n-1} &= \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\alpha^{2n}-(\alpha\beta)^{n-1}\left(\alpha^2+\beta^2\right)+\beta^{2n}}{8} \\ &= \frac{\alpha^{2n}-(-1)^{n-1}\cdot 6+\beta^{2n}}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n^{\ 2} &= \left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{\alpha^{2n}-2(\alpha\beta)^n+\beta^{2n}}{8} \\ &= \frac{\alpha^{2n}-2(-1)^n+\beta^{2n}}{8} \end{aligned}$$

したがって，

$$b_{n+1}b_{n-1}-b_n^{\ 2} = \frac{-6(-1)^{n-1}+2(-1)^n}{8} = (-1)^n \quad \cdots(\text{答})$$

(4) $(b_5,\ b_6) = (29,\ 70)$ より，求める整数 p，q の組は，

$70p-29q=1 \quad \cdots Ⓐ$
$0 \leqq p \leqq 100$
$0 \leqq q \leqq 100$

をすべて満たすもの．

さて，(3)の結果において，$n=5$ とすると，

$$b_6b_4-b_5^{\ 2} = (-1)^5$$

これと，$(b_5,\ b_6) = (29,\ 70)$ より，

$$70b_4-29b_5 = -1$$
$$\therefore\ 70(-b_4)-29(-b_5) = 1$$

となるから，Ⓐだけをみたすものの一つとして，

$$(p,\ q) = (-b_4,\ -b_5)$$
$$\therefore\ (p,\ q) = (-12,\ -29)$$

がある．よって，Ⓐは，

$$70(p+12) = 29(q+29)$$

とかける．いま，70 と 29 が互いに素より，k を整数として，

$$(p+12,\ q+29) = (29k,\ 70k)$$
$$\therefore\ (p,\ q) = (29k-12,\ 70k-29)$$

といえる．よって，$0 \leqq p \leqq 100$，$0 \leqq q \leqq 100$ も考えると，求める組 $(p,\ q)$ は，$k=1$ として，

$$(p,\ q) = (17,\ 41) \quad \cdots(\text{答})$$