$\boxed{1}$

(1)　$f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ は

$$f(x) = (x-a)^2 + 3a^2$$

とできるので，頂点 A の座標は $(a,\ 3a^2)$ である。よって，直線 OA の方程式は $y = 3ax$ となり，$y = f(x)$ とから y を消去すれば

$$x^2 - 5ax + 4a^2 = 0 \qquad \therefore\ x = a,\ 4a$$

$p \fallingdotseq a$ であることに注意して，$\boldsymbol{p = 4a}$ である。
また，$f'(x) = 2x - 2a$ であるから，点 $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線の方程式は

$$y = (2q - 2a)x - q^2 + 4a^2$$

と表せて，これが原点 O を通る条件は

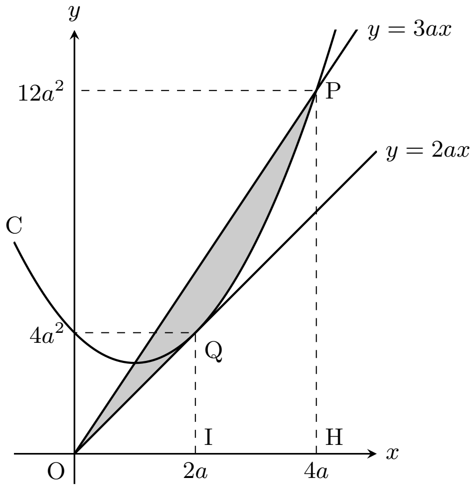
$$-q^2 + 4a^2 = 0 \qquad \therefore\ q = \pm 2a$$

$q > 0$，$a > 0$ に注意して，$\boldsymbol{q = 2a}$ である。
このとき

$$p - q = 4a - 2a = 2a > 0$$
$$\therefore\ p > q$$

■

(2)　(1) から，求める面積 S は次図の灰色部分の面積である。また，図のように点 H，I を定める。



したがって，求める面積 S は

$$S = \triangle\mathrm{OPH} - \triangle\mathrm{OQI} - \int_{2a}^{4a} f(x)\,dx$$

で得られる。

ここで

$$\triangle\mathrm{OPH} = \frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 12a^2 = 24a^3$$
$$\triangle\mathrm{OQI} = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 4a^2 = 4a^3$$
$$\begin{aligned}\int_{2a}^{4a} f(x)\,dx &= \int_{2a}^{4a}(x^2 - 2ax + 4a^2)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 4a^2x\right]_{2a}^{4a} \\ &= \frac{1}{3}\cdot 56a^3 - 12a^3 + 4\cdot 2a^3 \\ &= \frac{44}{3}a^3\end{aligned}$$

であるから

$$S = 24a^3 - 4a^3 - \frac{44}{3}a^3 = \boldsymbol{\frac{16}{3}a^3}$$

(3)　(2) の結果から

$$\begin{aligned}S = \frac{2}{3} &\iff \frac{16}{3}a^3 = \frac{2}{3} \\ &\iff a^3 = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

ここで，$a > 0$ を考慮して

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$$

$\boxed{2}$

(1)　$t > 1$ と条件 (a) および (b) のもとで

$$\begin{aligned}
&x+1-2\log_t(x+1)\\
&\geqq 2\log_t x+1-2\log_t(x+1) \quad (\because \ \ (\mathrm{b}))\\
&=1-2\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&>1-2\log_t\sqrt{t} \quad (\because \ \ (\mathrm{a}))\\
&=1-2\cdot\frac{1}{2}\\
&=0
\end{aligned}$$

したがって

$$x+1>2\log_t(x+1)$$

が成り立つ。 ■

(2)　5 以上のすべての整数 n に対して $n>2\log_2 n$ が成り立つことを，数学的帰納法で示す。

5 以上の整数 k に対して $k>2\log_2 k$ が成り立つと仮定する。このとき，$k \geqq 5$ より

$$k>\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

も成り立つから，(1) の条件 (a) および (b) の t を 2 としたものが成り立っている。したがって

$$k+1>2\log_2(k+1)$$

も成り立つ。また

$$\begin{aligned}
5-2\log_2 5&=\log_2 2^5-\log_2 5^2\\
&=\log_2 32-\log_2 25\\
&>0
\end{aligned}$$

なので，$5>2\log_2 5$ も成り立つ。

よって，5 以上のすべての整数 n に対して $n>2\log_2 n$ が成り立つことが示せた。

ゆえに，$n \leqq 2\log_2 n$ を満たす正の整数 n は

$$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

に限られる。

- $n=1$ のとき

$$2\log_2 1=0<1$$

　なので適さない。

- $n=2$ のとき

$$2\log_2 2=2 \geqq 2$$

　なので適する。

- $n=3$ のとき

$$2\log_2 3=\log_2 9 \geqq \log_2 8=3$$

　なので適する。

- $n=4$ のとき

$$2\log_2 4=4 \geqq 4$$

　なので適する。

以上から，求める正の整数 n は

$$\boldsymbol{n=2,\ 3,\ 4}$$

$\boxed{3}$

(1)　2 回の試行で作られる文字列は

AA，AB，BA，BB

であり，AA となる確率が p_2，BA となる確率が q_2，AB となる確率が r_2 だから

$$p_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{4}{9}}$$
$$q_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$$
$$r_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

$n+1$ 文字の文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA となるのは，n 文字の文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA となっているところに文字 A を付け加える場合だから

$$\boldsymbol{p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n} \quad \cdots\cdots ①$$

$n+1$ 文字の文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA となるのは，n 文字の文字列が可でかつ右端の文字が B となっているところに文字 A を付け加える場合だから

$$\boldsymbol{q_{n+1} = \frac{2}{3}r_n} \quad \cdots\cdots ②$$

$n+1$ 文字の文字列が可でかつ右端の 2 文字が AB となるのは，n 文字の文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA または BA となっているところに文字 B を付け加える場合だから

$$\boldsymbol{r_{n+1} = \frac{1}{3}(p_n + q_n)} \quad \cdots\cdots ③$$

(2)　①，②，③ から

$$\begin{aligned} & p_{n+1} + 2q_{n+1} + 2r_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}q_n + 2\cdot\frac{2}{3}r_n + 2\cdot\frac{1}{3}(p_n+q_n) \\ &= \frac{2}{3}(p_n + 2q_n + 2r_n) \end{aligned}$$

とできるので，2 以上の整数 n に対して

$$\begin{aligned} p_n + 2q_n + 2r_n &= (p_2 + 2q_2 + 2r_2)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\ &= \boldsymbol{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

(3)　①，②，③ から

$$\begin{aligned} & p_{n+1} + iq_{n+1} - (1+i)r_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}q_n + i\cdot\frac{2}{3}r_n - (1+i)\cdot\frac{1}{3}(p_n+q_n) \\ &= -\frac{1+i}{3}\{p_n + iq_n - (1+i)r_n\} \end{aligned}$$

とできるので，2 以上の整数 n に対して

$$\begin{aligned} & p_n + iq_n - (1+i)r_n \\ &= \{p_2 + iq_2 - (1+i)r_2\}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2} \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}} \end{aligned}$$

(4)　(3) の結果とド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} & (p_n - r_n) + (q_n - r_n)i \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n-2} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n \left\{\cos\frac{(n-2)\pi}{4} + i\sin\frac{(n-2)\pi}{4}\right\} \end{aligned}$$

とできる。ここで，p_n，q_n，r_n は実数だから

$$p_n - r_n = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n \cos\frac{(n-2)\pi}{4}$$

したがって，$p_n = r_n$ を満たすための必要十分条件は

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{4} = 0$$

が成り立つこと。すなわち

$$\frac{(n-2)\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

となる整数 k が存在すること。これより

$$n - 2 = 2 + 4k \qquad \therefore\ n = 4 + 4k$$

とできるので，求める必要十分条件は

n が 4 の倍数であること

である。

4

(1)　$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ の座標から

$$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\qquad\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|=\sqrt{9}=\mathbf{3}$$

(2)　球面 S_1 の半径を $R_1\ (=\sqrt{5})$，球面 S_2 の半径を $R_2\ (=\sqrt{2})$ とすると

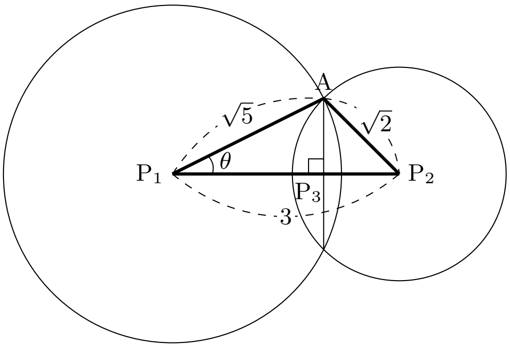
$$R_1-R_2=\sqrt{5}-\sqrt{2}<\sqrt{5}<3$$
$$R_1+R_2=\sqrt{5}+\sqrt{2}>2+1=3$$

なので

$$R_1-R_2<|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|<R_1+R_2$$

が成り立つ。よって，S_1 と S_2 は交わりをもつ。　■

この交わりの円 C 上に点 A をとるとき，点 A から線分 $\mathrm{P_1P_2}$ に下ろした垂線の足が円 C の中心 $\mathrm{P_3}$ であり，平面 $\mathrm{AP_1P_2}$ による断面は次図のようになる。



ここで，$\theta=\angle\mathrm{AP_1P_2}$ とおくと，三角形 $\mathrm{AP_1P_2}$ における余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{5})^2+3^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot\sqrt{5}\cdot 3}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

したがって，円 C の半径 r は

$$r=\mathrm{AP_3}=\sqrt{5}\sin\theta=\mathbf{1}$$

である。また

$$\mathrm{P_1P_3}=\sqrt{5}\cos\theta=2$$

なので，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_3}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$ が成り立ち

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$$
$$=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}13\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

よって，円 C の中心 $\mathrm{P_3}$ の座標は

$$\mathbf{P_3\left(\frac{13}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)}$$

(3)　平面 H 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_3P}}=0$$

が成り立つから

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-13/3\\y+1/3\\z+1/3\end{pmatrix}=0$$
$$\therefore\ 2x+y-2z-9=0\quad\cdots\cdots\ ①$$

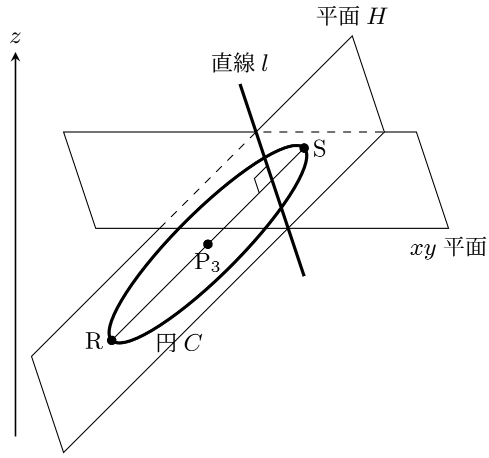
これが平面 H の方程式であり，$z=0$ を代入すると

$$2x+y-9=0\qquad\therefore\ y=-2x+9$$

これが xy 平面と平面 H の交わりの直線 l の xy 平面における方程式である。この直線 l の方向ベクトルの 1 つ $\vec{v}$ は $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ であり，$|\vec{v}|=\sqrt{5}$ である。求めるベクトルは直線 l と平行で，大きさが 1 のものだから

$$\pm\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\pm\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

(4)　円 C 上の点 Q と xy 平面の距離 d が最大となるのは，点 Q が下図の点 R に一致するときである。



この点 R の座標を $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)\ \ (z<0)$ とおくとき，点 R は平面 H 上にあるから式 ① が成り立つ。また

$$\overrightarrow{\mathrm{P_3R}}=\begin{pmatrix}x-13/3\\y+1/3\\z+1/3\end{pmatrix}$$

と表せて，直線 l と垂直だから

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_3R}}=0$$
$$\therefore\ x-2y-5=0\quad\cdots\cdots\ ②$$

さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{P_3R}}| = r = 1$ だから

$$\left(x - \frac{13}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 = 1 \quad \cdots\cdots ③$$

② から

$$y = \frac{x-5}{2} \quad \cdots\cdots ②'$$

とでき，これを ① に代入して整理すると

$$z = \frac{5x-23}{4} \quad \cdots\cdots ①'$$

①$'$ と ②$'$ を ③ に代入すると

$$\begin{aligned}
&\left(x - \frac{13}{3}\right)^2 + \left(\frac{3x-13}{6}\right)^2 + \left(\frac{15x-65}{12}\right)^2 = 1 \\
\iff\ &\left(x - \frac{13}{3}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(x - \frac{13}{3}\right)^2 \\
&\qquad\qquad + \frac{25}{16}\left(x - \frac{13}{3}\right)^2 = 1 \\
\iff\ &\frac{45}{16}\left(x - \frac{13}{3}\right)^2 = 1 \\
\iff\ &\left(x - \frac{13}{3}\right)^2 = \frac{16}{45} \\
\iff\ &x = \frac{13}{3} \pm \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{65 \pm 4\sqrt{5}}{15}
\end{aligned}$$

このとき，①$'$ から

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{3}$$

となるが，$z < 0$ なので

$$z = \frac{-1-\sqrt{5}}{3}, \quad x = \frac{65-4\sqrt{5}}{15}$$

よって，②$'$ から

$$y = \frac{-5-2\sqrt{5}}{15}$$

以上から，求める d の最大値は

$$|z| = \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{3}}$$

であり，このときの点 Q の座標，すなわち点 R の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{65-4\sqrt{5}}{15},\ \frac{-5-2\sqrt{5}}{15},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{3}\right)}$$

$\boxed{5}$

(1)　$f(x) = \dfrac{\log(2x-3)}{x}$ から

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left\{\frac{2}{2x-3}\cdot x - \log(2x-3)\cdot 1\right\}$$
$$= \frac{2x-(2x-3)\log(2x-3)}{x^2(2x-3)}$$

となるので

$$\boldsymbol{g(x) = 2x - (2x-3)\log(2x-3)}$$

(2)　(1) の結果から，$x>2$ において

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 - 2\log(2x-3) - (2x-3)\cdot\frac{2}{2x-3} \\ &= -2\log(2x-3) \\ &< -2\log(2\cdot 2-3) \quad (\because \ x>2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

とできるので，$g(x)$ は単調に減少する。また

$$\begin{aligned} g(2) &= 4 - \log 1 = 4 > 0 \\ g(6) &= 12 - 9\log 9 \\ &= 6(2 - 3\log 3) \\ &= 6(\log e^2 - \log 27) \\ &< 0 \quad (\because \ e<3 \text{ より } e^2 < 9 < 27) \end{aligned}$$

であることも考慮して，$g(\alpha)=0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在する。なお，この α は $2<\alpha<6$ を満たす。 ■

(3)　$x \geqq 2$ において $x^2(2x-2)>0$ だから，$f'(x)$ の符号は $g(x)$ の符号に一致する。(2) も考慮して，$f(x)$ の増減は次表の通り。

x	2	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

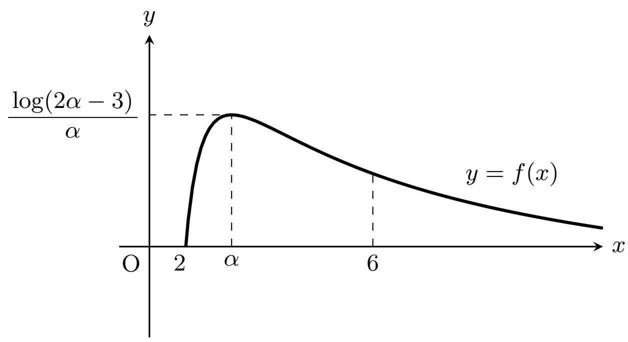
また

$$f(2) = \frac{\log 1}{2} = 0$$
$$f(\alpha) = \frac{\log(2\alpha-3)}{\alpha}$$

であることと

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)\frac{\log(2x-3)}{2x-3} = 0$$

もあわせて，$y=f(x)$ $(x \geqq 2)$ の概形は次図のようになる。



(4)　$2 \leqq m < n$ を満たす整数 m，n に対して

$$\begin{aligned} (*)\ \ & (2m-3)^n = (2n-3)^m \\ \iff\ & \log(2m-3)^n = \log(2n-3)^m \\ \iff\ & \frac{\log(2m-3)}{m} = \frac{\log(2n-3)}{n} \\ \iff\ & f(m) = f(n) \end{aligned}$$

とできる。これを満たす m は，$2<\alpha<6$ と (3) のグラフから

$$m = 3,\ 4,\ 5$$

に限る。

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{\log 3}{3} \\ f(4) &= \frac{\log 5}{4} \\ f(5) &= \frac{\log 7}{5} \\ f(6) &= \frac{\log 9}{6} = \frac{\log 3}{3} \end{aligned}$$

であることとあわせて，求める組は

$$\boldsymbol{(m,\ n) = (3,\ 6)}$$

$\boxed{6}$

(1)　点 P，Q の座標から $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ -1\end{pmatrix}$ であり，点 R は直線 PQ 上にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\ \ (t:\text{実数})$$

と表せる。したがって

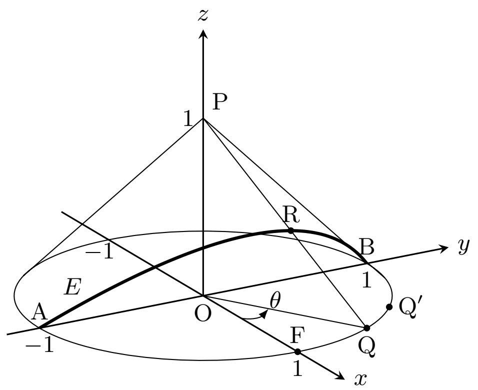
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ -1\end{pmatrix}$$

とでき，点 R は平面 $H: z=x$ 上にあるので

$$1-t=t\cos\theta \qquad \therefore\ \ t=\frac{1}{1+\cos\theta}$$

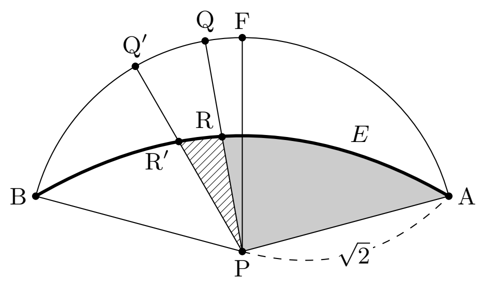
よって，線分 PR の長さ $r(\theta)$ は

$$r(\theta)=\frac{1}{1+\cos\theta}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{1+\cos\theta}}$$



(2)　円錐 K の $x\geqq 0$ の部分の側面の展開図は，半径 $\sqrt{2}$ の扇形であり，題意の面積 $S(\theta)$ は次図の灰色部分の面積である。

また，(1) の図において，Q$'(\cos(\theta+h),\ \sin(\theta+h),\ 0)$ とし，曲線 E と線分 PQ$'$ の交点を R$'$ とする。



このとき，展開図における弧 QQ$'$ の長さは，(1) の図における xy 平面上の単位円を考えて h であるから

$$\angle\mathrm{QPQ}'=\frac{h}{\sqrt{2}}$$

となる。

θ が $\theta+h$ まで増加するときの面積 $S(\theta)$ の増分は，図の斜線部分の面積であり $S(\theta+h)-S(\theta)$ と表せる。

また，$r(\theta)$ は $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において増加関数だから，上記の増分は，線分 PR を半径とする中心角 ∠QPQ$'$ の扇形の面積より大きく，線分 PR$'$ を半径とする中心角 ∠QPQ$'$ の扇形の面積より小さい。したがって

$$\frac{1}{2}\{r(\theta)\}^2\cdot\frac{h}{\sqrt{2}}\leqq S(\theta+h)-S(\theta)$$
$$\leqq\frac{1}{2}\{r(\theta+h)\}^2\cdot\frac{h}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \ \frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}\leqq S(\theta+h)-S(\theta)\leqq\frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

が成り立つ。■

(3)　$h>0$ の場合，(2) の結果より

$$\frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}\leqq\frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h}\leqq\frac{\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

となる。ここで

$$\lim_{h\to+0}\frac{\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}=\frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{h\to+0}\frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h}=\frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

が成り立つ。

$h<0$ の場合にも同様の議論により

$$\frac{1}{2}\{r(\theta+h)\}^2\cdot\frac{-h}{\sqrt{2}}\leqq S(\theta)-S(\theta+h)$$
$$\leqq\frac{1}{2}\{r(\theta)\}^2\cdot\frac{-h}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \ \frac{\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}\leqq\frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h}\leqq\frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \ \lim_{h\to-0}\frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h}=\frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

とできるので，微分の定義により

$$S'(\theta)=\frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}(1+\cos\theta)^2}$$

である。この議論は $\theta\leqq 0$ の場合も同様に成り立つ。

以上から，求める面積 T は

$$T=(\text{扇形 PAB})-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}S'(\theta)\,d\theta$$

で得られる。ここで

$$(\text{扇形 PAB})=\frac{1}{2}(\text{弧 AB})\cdot\mathrm{PA}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

である。また，$u=\tan\dfrac{\theta}{2}$ と置換するとき

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{1+u^2}{2}$$

であり

$$
\begin{aligned}
1+\cos\theta &= 1+\frac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}} \\
&= 1+\frac{1-u^2}{1+u^2} \\
&= \frac{2}{1+u^2}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} S'(\theta)\,d\theta &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}(1+\cos\theta)^2}\,d\theta \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{(1+u^2)^2}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^{1}(1+u^2)\,du \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{0}^{1}(1+u^2)\,du \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[u+\frac{1}{3}u^3\right]_0^1 \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
T = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi - \frac{2\sqrt{2}}{3}}
$$