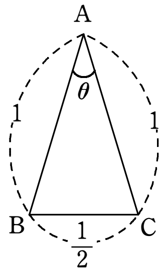
1 (1)　△ABC における余弦定理より

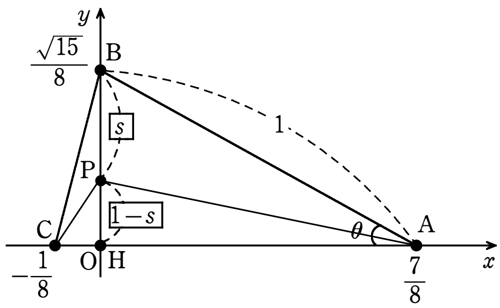
$$\cos\theta = \frac{1^2+1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\cdot 1\cdot 1} = \underset{\sim\sim}{\frac{7}{8}}$$



このとき

$$\sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \underset{\sim\sim}{\frac{\sqrt{15}}{8}}$$

(2)　(1) の結果から，右図のようにおけるので



$$AP^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left\{(1-s)\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}\right\}^2$$

$$BP^2 = \left(s\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^2$$

$$CP^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left\{(1-s)\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}\right\}^2$$

したがって

$$\begin{aligned} AP^2+BP^2+CP^2 &= \frac{49}{64}+\frac{1}{64}+\frac{15}{64}s^2+2\cdot\frac{15}{64}(1-s)^2 \\ &= \frac{5}{64}\{10+3s^2+6(1-s)^2\} \\ &= \frac{5}{64}(9s^2-12s+16) \\ &= \frac{5}{64}\left\{9\left(s-\frac{2}{3}\right)^2+12\right\} \end{aligned}$$

$0 < s < 1$ なので，$AP^2+BP^2+CP^2$ は，$\underset{\sim\sim}{s = \frac{2}{3}}$ のとき最小値 $\frac{5}{64}\cdot 12 = \underset{\sim\sim}{\frac{15}{16}}$ をとる。

2 (1) L, M の式を連立して

$$\begin{cases} -4x+3y+a=0 \\ 3x+4y-7a=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} x=a \\ y=a \end{cases} \quad \cdots\cdots (*)$$

よって，L, M の交点が C 上にある条件は，C の式に $(*)$ を代入して成り立つこと。すなわち

$$a^2-2a\cdot a+a^2-4a+4=0 \qquad \therefore \quad \underline{a=1}$$

(2) C の式は $(x-a)^2+(y-2)^2=a^2$ とできるから，C は中心 $(a,\ 2)$，半径 $|a|$ の円である。

この円 C と直線 L が異なる 2 つの共有点をもつ条件は

(C の中心から L までの距離) < (C の半径)

であるから，点と直線の距離の公式より

$$\frac{|-4a+3\cdot 2+a|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}<|a| \iff |3a-6|<|5a|$$

$$\iff (3a-6)^2<(5a)^2$$

$$\iff (8a-6)(2a+6)>0 \qquad \therefore \quad \underline{a<-3,\ \frac{3}{4}<a}$$

(3) (2) と同様に，円 C と直線 M が異なる 2 つの共有点をもつ条件は

$$\frac{|3a+4\cdot 2-7a|}{\sqrt{3^2+4^2}}<|a| \qquad \therefore \quad a<-8,\ \frac{8}{9}<a$$

以上から，円 C と直線 L の交点の個数 l，円 C と直線 M の交点の個数 m は下表のようになる。

a	$\cdots$	-8	$\cdots$	-3	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$
l	2	2	2	1	0	1	2	2	2
m	2	1	0	0	0	0	0	1	2

(1) から，$a=1$ のときは L と M の交点が C 上にあることに注意して，求める a の値は

$$\underline{a=-8,\ \frac{8}{9},\ 1}$$

3 (1)　n についての数学的帰納法で示す。

（ア）$n=3$ のとき

$2^n+n^2+8=8+9+8=25$，　$3^n=27$ なので

$$2^n+n^2+8<3^n$$

が成り立つ。

（イ）$n=k$ $(k \geqq 3)$ のとき

$$2^k+k^2+8<3^k \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つと仮定する。このとき

$$\begin{aligned}3^{k+1}-\{2^{k+1}+(k+1)^2+8\} &= 3\cdot 3^k-2^{k+1}-(k+1)^2-8\\ &> 3(2^k+k^2+8)-2^{k+1}-(k+1)^2-8 \quad (\because\ ①)\\ &= 2^k+2k^2-2k+15\\ &= 2^k+2k(k-1)+15\\ &> 0 \quad (\because\ k \geqq 3)\end{aligned}$$

よって，$3^{k+1}>2^{k+1}+(k+1)^2+8$ が成り立つ。

以上（ア）（イ）から，数学的帰納法により，3 以上のすべての整数 n に対して

$$2^n+n^2+8<3^n$$

が成り立つことが示された。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終了）

(2)　(1) の結論から，$2^n+n^2+8 \geqq 3^n$ を満たす正の整数 n は $n=1$，2 に限る。

$n=1$ のとき，$2^n+n^2+8=11$，$3^n=3$ なので適する。

$n=2$ のとき，$2^n+n^2+8=16$，$3^n=9$ なので適する。

よって，$2^n+n^2+8 \geqq 3^n$ を満たす正の整数 n は $n=1$，2 である。

(3)　n は正の整数，a，b は 0 以上の整数だから $an+b \geqq 0$ である。

よって，等式 $2^n+n^2+8=3^n+an+b$ を満たす n は，不等式 $2^n+n^2+8 \geqq 3^n$ を満たすもの，すなわち $n=1$，2 に限る。

（ア）$n=1$ の場合

$$11=3+a+b \qquad \therefore\ a+b=8$$

a，b は 0 以上の整数だから，これを満たす組は

$(a,\ b)=(0,\ 8)，(1,\ 7)，(2,\ 6)，(3,\ 5)，(4,\ 4)，(5,\ 3)，(6,\ 2)，(7,\ 1)，(8,\ 0)$

（イ）$n=2$ の場合

$$16=9+2a+b \qquad \therefore\ 2a+b=7$$

a，b は 0 以上の整数だから，これを満たす組は

$(a,\ b)=(0,\ 7)，(1,\ 5)，(2,\ 3)，(3,\ 1)$

以上から，求める組 $(a,\ b,\ n)$ は

$(0,\ 8,\ 1)，(1,\ 7,\ 1)，(2,\ 6,\ 1)，(3,\ 5,\ 1)，(4,\ 4,\ 1)，$
$(5,\ 3,\ 1)，(6,\ 2,\ 1)，(7,\ 1,\ 1)，(8,\ 0,\ 1)，$
$(0,\ 7,\ 2)，(1,\ 5,\ 2)，(2,\ 3,\ 2)，(3,\ 1,\ 2)$

4 (1)　2 回の試行の結果，手元に白玉が 2 個あるのは

箱から 2 回連続で白玉を出し，かつ硬貨は 2 回連続で表が出るとき

であるから，その確率は

$$\frac{3\cdot 2}{5\cdot 4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\underset{\sim\sim}{\frac{3}{40}}$$

(2)　硬貨の裏が出ると，取り出した玉を箱に戻すので，箱の中の玉の個数は変化しない。

このことを踏まえると，3 回の試行の結果，手元の玉が白玉 1 個，赤玉 1 個の計 2 個となるのは

（玉の色，コインの表裏）＝（赤，表），（白，表），（どちらでもよい，裏）

という 3 つの事象が任意の順番で起こるときである。したがって，求める確率は

$$3!\cdot\frac{3\cdot 2}{5\cdot 4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\underset{\sim\sim}{\frac{9}{40}}$$

(3)　ちょうど n 回目で試行が停止するのは

n 回目の硬貨投げで，５度目の表がでるとき

つまり

1 回目から $n-1$ 回目までの硬貨投げで 4 回表が出て，n 回目に表が出るとき

であるから，その確率 p_n は

$$p_n={}_{n-1}\mathrm{C}_4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}\cdot\frac{1}{2}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{{}_{n-1}\mathrm{C}_4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

(4)　(3) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+1}}{p_n}&=\frac{{}_n\mathrm{C}_4}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{{}_{n-1}\mathrm{C}_4}\\&=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^{n+1}\cdot 4!}\cdot\frac{2^n\cdot 4!}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}\\&=\frac{n}{2(n-4)}\quad(n=5,6,\cdots)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 1-\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{n-8}{2(n-4)}$$

したがって

$n=5,6,7$ のとき，$1-\dfrac{p_{n+1}}{p_n}<0$　　$\therefore\ p_n<p_{n+1}$

$n=8$ のとき，$1-\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=0$　　$\therefore\ p_n=p_{n+1}$

$n=9,10,11,\cdots$ のとき，$1-\dfrac{p_{n+1}}{p_n}>0$　　$\therefore\ p_n>p_{n+1}$

である。つまり

$$p_5<p_6<p_7<p_8=p_9>p_{10}>p_{11}>\cdots\cdots$$

となる。

よって，確率 p_n が最大となる n は $\underset{\sim\sim\sim}{n=8,\ 9}$ である。

$\boxed{5}$ (1)　実数 t に対して

$$z = \frac{-1}{t+i} = \frac{-t+i}{t^2+1}$$

とできるので，z の実部 x と虚部 y は

$$x = \frac{-t}{t^2+1}, \quad y = \frac{1}{t^2+1}$$

(2)
$$\begin{aligned}\left|z-\frac{i}{2}\right| &= \left|\frac{-t}{t^2+1}+\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{2}\right)i\right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{-t}{t^2+1}\right)^2+\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}-\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(3)　(2) の結果から，点 z は中心 $\frac{i}{2}$，半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にあることが分かる。

また，$z = x+yi$ (x，y：実数) とするとき，(1) から

$$x = \frac{-t}{t^2+1},\ y = \frac{1}{t^2+1} \qquad \therefore\ x = -ty$$

$y = \frac{1}{t^2+1} > 0$ なので

$$x = -ty \iff t = -\frac{x}{y}$$

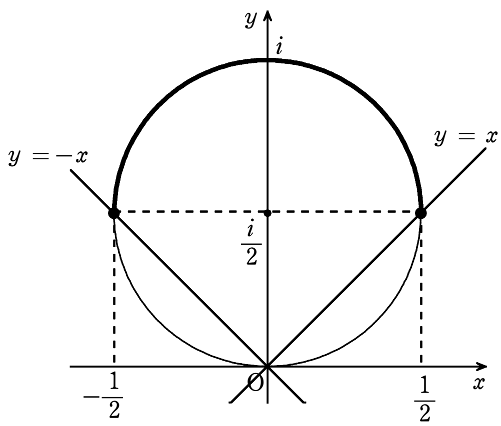
したがって，$-1 \leqq t \leqq 1$ となる t が存在する条件は

$$(2)\ の円\ かつ\ y > 0\ かつ\ -1 \leqq -\frac{x}{y} \leqq 1$$

である。ここで，$y > 0$ のもとで

$$\begin{aligned}-1 \leqq -\frac{x}{y} \leqq 1 &\iff -y \leqq -x \leqq y \\ &\iff x \leqq y\ かつ\ -x \leqq y\end{aligned}$$

であるから，点 z が描く図形は右図の太線部分である。



$\boxed{6}$ (1) $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ とおけば，$\dfrac{dx}{dt} = -1$ なので

$$\begin{aligned} A(m, n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x \, dx \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^m\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \cos^n t \, dt \\ &= A(n, m) \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} A(m+2, n) + A(m, n+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{m+2} x \sin^n x + \cos^m x \sin^{n+2} x) \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x \, dx \\ &= A(m, n) \end{aligned}$$

（証明終了）

(2) $A(m, 1) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x (\cos x)' \, dx$

$$\begin{aligned} &= -\left[\frac{1}{m+1} \cos^{m+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \underline{\frac{1}{m+1}} \end{aligned}$$

(3) $A(m, n+2) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^{n+2} x \, dx$

$$\begin{aligned} &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x (\cos x)' \cdot \sin^{n+1} x \, dx \\ &= -\left[\frac{1}{m+1} \cos^{m+1} x \sin^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n+1}{m+1} \cos^{m+1} x (\sin^n x \cos x) \, dx \\ &= \frac{n+1}{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \sin^n x \, dx \\ &= \frac{n+1}{m+1} A(m+2, n) \end{aligned}$$

（証明終了）

(4)　数学的帰納法で示す。

(1)，(2) から

$$A(m\,,\,1)=A(1\,,\,m)=\frac{1}{m+1}$$

であり，正の整数 m に対して，これは有理数である。

$n=k$ （k：奇数）のとき

$A(m\,,\,k)=A(k\,,\,m)$ （m：正の整数）が有理数である　……(*)

と仮定する。

このとき，(3) の結論から

$$A(m\,,\,k+2)=\frac{k+1}{m+1}A(m+2\,,\,k)$$

とでき，仮定 (*) より $A(m+2\,,\,k)$ は有理数で，$\dfrac{k+1}{m+1}$ も有理数だから，$A(m\,,\,k+2)$ は有理数である。

(1) で示したことから，$A(m\,,\,k+2)=A(k+2\,,\,m)$ が成り立つので，$A(m\,,\,k+2)$ と $A(k+2\,,\,m)$ がともに有理数である。

以上から，数学的帰納法により，m または n が奇数ならば $A(m\,,\,n)$ は有理数であることが示された。　　　　（証明終了）