2022　東京医科歯科大学（前期）物理　解答例

1

問１　人工衛星の質量を m'，地球の質量を M，万有引力定数を G とすると，運動方程式より

$$m'\frac{{v_0}^2}{R} = G\frac{Mm'}{R^2}$$

また，地表での重力加速度の大きさが g であるから

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

２式より

$$v_0 = \sqrt{gR}$$

$$T_0 = \frac{2\pi R}{v_0} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

問２　力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m'v'^2 - G\frac{Mm'}{R} = 0 \qquad \therefore \quad v' = \sqrt{2gR} \qquad (\because \quad GM = gR^2)$$

問３　運動量保存則より

$$mv_\mathrm{P} = (m + \mathit{\Delta} m)\,v_0 \qquad \therefore \quad v_\mathrm{P} = \frac{m + \mathit{\Delta} m}{m}v_0$$

問４　前問の結果を用いて

$$\begin{aligned}\mathit{\Delta} E &= \frac{1}{2}m{v_\mathrm{P}}^2 - \frac{1}{2}(m + \mathit{\Delta} m)\,{v_0}^2 \\ &= \frac{(m + \mathit{\Delta} m)\,\mathit{\Delta} m}{2m}{v_0}^2\end{aligned}$$

問５　面積速度一定，および力学的エネルギー保存則より

$$\begin{cases} Rv_\mathrm{P} = r_\mathrm{A}v_\mathrm{A} \\ \dfrac{1}{2}m{v_\mathrm{P}}^2 - G\dfrac{Mm}{R} = \dfrac{1}{2}m{v_\mathrm{A}}^2 - G\dfrac{Mm}{r_\mathrm{A}} \end{cases}$$

２式より

$$v_\mathrm{P} = \sqrt{2gR} \times \sqrt{\frac{r_\mathrm{A}}{r_\mathrm{A} + R}}\,, \qquad v_\mathrm{A} = \sqrt{2gR} \times \frac{R}{\sqrt{r_\mathrm{A}\,(r_\mathrm{A} + R)}}$$

問６　ケプラーの第３法則より

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{R + r_\mathrm{A}}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}$$

問７　P 点での力学的エネルギーを考えて

$$E = \frac{1}{2}m{v_\mathrm{P}}^2 - G\frac{Mm}{R}$$

$$= mgR\frac{r_\mathrm{A}}{r_\mathrm{A}+R} - mgR = \underline{-\frac{mgR^2}{r_\mathrm{A}+R}}$$

問８　人工衛星が点 C から点 B まで移動する間に，地球中心と人工衛星を結ぶ線分が通過する面積は，題意により

$$\pi ab \times \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}\pi ab$$

△OBC の面積に着目して

$$\frac{1}{2}\cdot 2b\cdot\sqrt{a^2-b^2} = \frac{1}{2}\pi ab - \frac{1}{3}\pi ab$$

$$\therefore\quad a^2-b^2 = \frac{\pi^2}{36}a^2$$

$$\therefore\quad b = \underline{\frac{\sqrt{36-\pi^2}}{6}a}$$

$\boxed{2}$

問 1 (1)　加速度の大きさは $a_1 = \dfrac{qE}{m}$ なので，求める速さを v_1 とすると等加速度運動の公式より，

$$v_1{}^2 - 0^2 = 2 \cdot \frac{qE}{m} \cdot d \quad \therefore \quad v_1 = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$$

(2)　荷電粒子は領域 I に入射した直後，$+x$ 方向に力を受けて円運動を始める。この円運動の半径を R とすると，円運動の運動方程式より，

$$\frac{mv_1{}^2}{R} = qv_1B_0$$

$$\therefore \quad R = \frac{mv_1}{qB_0} = \frac{1}{B_0}\sqrt{\frac{2mEd}{q}}$$

求める座標は

$$(x, y) = (2R, 0) = \left(\frac{2}{B_0}\sqrt{\frac{2mEd}{q}}, 0\right)$$

(3)　原点 O に達するまでの時間を t_1 とすると等加速度運動の公式より，

$$t_1 = \frac{v_1 - 0}{a_1} = \sqrt{\frac{2md}{qE}}$$

原点 O から点 Q_2 までの時間 t_2 は円運動の半周期なので

$$t_2 = \frac{\pi R}{v_1} = \frac{\pi m}{qB_0}$$

よって求める時間は

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2md}{qE}} + \frac{\pi m}{qB_0}$$

(4)　磁場は仕事をしないので，電場による仕事だけを考えればよい。仕事は力と変位の積で与えられるので，

$$qE \cdot \{0 - (-d)\} = qEd$$

(5)　問 2 と同様に，α 粒子（電荷 $+2e$）に関して，

$$r_\alpha = \frac{m_\alpha v_\alpha}{2eB_0}$$

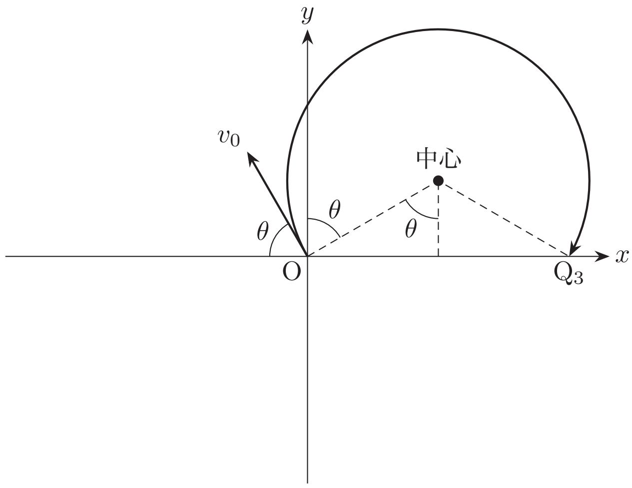
β 粒子（電荷 $-e$）に関して，

$$r_\beta = \frac{m_\beta v_\beta}{eB_0}$$

比を取って整理して，

$$\frac{m_\alpha}{m_\beta} = \frac{2r_\alpha v_\beta}{r_\beta v_\alpha}$$

(6)　軌跡は右図の円弧のようになる。この円運動の半径 R' は，



$$R' = \frac{mv_0}{qB_0}$$

なので，その中心の座標は

$$(x, y) = (R'\sin\theta, R'\cos\theta)$$
$$= \left(\frac{mv_0\sin\theta}{qB_0}, \frac{mv_0\cos\theta}{qB_0}\right)$$

Q_3 の座標は

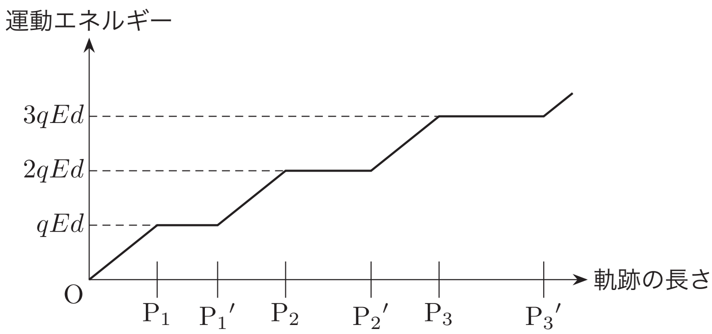
$$(x, y) = (2R'\sin\theta, 0)$$
$$= \left(\frac{2mv_0\sin\theta}{qB_0}, 0\right)$$

(7)　中心角 $2\pi - 2\theta$ の円弧を運動する時間を求めればよいので，

$$\frac{(2\pi - 2\theta)R'}{v_0} = \frac{2(\pi - \theta)m}{qB_0}$$

問 2 (1)　領域 1：裏から表，領域 2：表から裏

(2)　領域 1，2 では運動エネルギーは変化せず，領域 3 では運動した距離に比例して運動エネルギーは増加する。よって右図のようになる。



(3)　電場による仕事は $qE \cdot nd = nqEd$ であるから，n 回目に領域 3 を通過した直後の速さを v_n とすると，

$$\frac{1}{2}m{v_n}^2 = nqEd$$

$$\therefore \quad v_n = \sqrt{\frac{2nqEd}{m}}$$

したがって円運動の半径は

$$r_n = \frac{mv_n}{qB_0}$$
$$= \frac{1}{B_0}\sqrt{\frac{2nmEd}{q}}$$

⑷　円運動の半周期を求めればよい。

$$t_n = \frac{\pi r_n}{v_n} = \frac{\pi m}{qB_0}$$

⑸　速さは v_{n+N} であるから，

$$r_n = \frac{mv_{n+N}}{qB_{n,\,N}}$$

$r_n = \dfrac{mv_n}{qB_0}$ だったので比を取って整理すれば，

$$B_{n,\,N} = \frac{v_{n+N}}{v_n}B_0 = \sqrt{\frac{n+N}{n}}B_0$$

⑹　$t_{n,\,N}$ は，

$$t_{n,\,N} = \frac{\pi r_n}{v_{n+N}} = \frac{v_n}{v_{n+N}} \times \frac{\pi r_n}{v_n} = \sqrt{\frac{n}{n+N}} \times t_n$$