1

(1)　$ma_1 = -2kx_1$

(2)　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$

(3)　$x_1 = \dfrac{d}{2}$

(4)　物体２に加えている外力を F とすると，物体２に関する力のつり合いより

$$F - kd - k(d - x_1) = 0 \qquad \therefore \quad F = \frac{3}{2}kd \qquad \left(\because \quad x_1 = \frac{d}{2}\right)$$

(5)　求める弾性エネルギーの和を E とすると，各ばねの弾性エネルギーの和を考えて

$$E = \frac{1}{2}k{x_1}^2 + \frac{1}{2}k(d - x_1)^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{3}{4}kd^2 \qquad \left(\because \quad x_1 = \frac{d}{2}\right)$$

(6)　各ばねの伸びは左から順に，x_1，$x_2 - x_1$，$-x_2$ であるから，運動方程式は

物体１：$ma_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \qquad \therefore \quad ma_1 = -2kx_1 + kx_2$

物体２：$ma_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) \qquad \therefore \quad ma_2 = kx_1 - 2kx_2$

(7)　$u_1 = v_1 + v_2 \qquad b_2 = a_1 - a_2$

(8)　$mb_1 = -ky_1 \qquad mb_2 = -3ky_2$

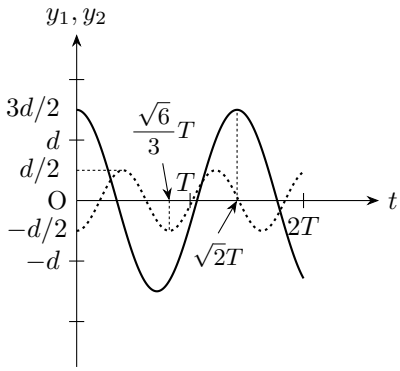
(9)　$y_1(0) = \dfrac{3}{2}d \qquad u_2(0) = 0$

(10)　初期条件 $y_2(0) = \dfrac{d}{2} - d = -\dfrac{d}{2}$，$u_1(0) = 0$ も考慮すると

$$y_1(t) = \frac{3}{2}d\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$y_2(t) = -\frac{d}{2}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t$$

グラフは右図。



(11)　前問の結果より

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\{y_1(t) - y_2(t)\} \qquad \therefore \quad x_2(t) = \frac{d}{4}\left(3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)$$

(12)　ばねの伸びは左から順に x_1，$x_2 - x_1$，$x_3 - x_2$，$-x_3$ であるから，運動方程式は

物体１：$ma_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \qquad \therefore \quad ma_1 = -2kx_1 + kx_2$

物体２：$ma_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) \qquad \therefore \quad ma_2 = kx_1 - 2kx_2 + kx_3$

物体３：$ma_3 = -k(x_3 - x_2) - kx_3 \qquad \therefore \quad ma_3 = kx_2 - 2kx_3$

(13)　与えられた変数変換をして

$$mb_1 = -\left(2-\sqrt{2}\right)ky_1$$

$$mb_2 = -2ky_2$$

$$mb_3 = -\left(2+\sqrt{2}\right)ky_3$$

(14)　$x_2(0)=d$ より，$x_1(0)=x_3(0)=\dfrac{d}{2}$ となるから，

$$y_1(0) = \frac{d}{2}+\sqrt{2}d+\frac{d}{2} = \left(\sqrt{2}+1\right)d$$

$$y_2(0) = 0$$

$$y_3(0) = \frac{d}{2}-\sqrt{2}d+\frac{d}{2} = -\left(\sqrt{2}-1\right)d$$

また，$u_1(0)=u_2(0)=u_3(0)=0$ であるから

$$y_1(t) = \left(\sqrt{2}+1\right)d\cos\omega_1 t \qquad \left(\omega_1 = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})k}{m}}\right)$$

$$y_2(t) = 0$$

$$y_3(t) = -\left(\sqrt{2}-1\right)d\cos\omega_2 t \qquad \left(\omega_2 = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})k}{m}}\right)$$

ここで，$x_2(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\{y_1(t)-y_3(t)\}$ より

$$x_2(t) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}d\cos\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})k}{m}}\,t + \frac{2-\sqrt{2}}{4}d\cos\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})k}{m}}\,t$$

2

(1)　$v_1 = \sqrt{\dfrac{2eV}{m}}$，$\lambda_1 = \dfrac{h}{\sqrt{2meV}}$

(2)　$2d\sin\theta = N\lambda_1$

(3)　$2d > \lambda_1$

(4)　$d = \dfrac{\lambda_1}{2\sin\theta_A}$

(5)　強め合いの条件より

$$\lambda_1 = 2 \times 4.4 \times 10^{-10} \times \frac{1}{2} = 4.4 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

(1)より

$$\lambda_1{}^2 = \frac{h^2}{2meV}$$

$$\therefore\quad V = \frac{h^2}{2me\lambda_1{}^2} = \frac{(6.6 \times 10^{-34})^2}{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-19} \times (4.4 \times 10^{-10})^2}$$

$$= 7.72\ldots = 7.7\ \mathrm{V}$$

光子のエネルギーは，1 eV が 1.6×10^{-19} J であることに気をつけて，

$$\frac{h\nu}{1.6 \times 10^{-19}} = \frac{h \cdot \dfrac{c}{\lambda_1}}{1.6 \times 10^{-19}} = \frac{6.6 \times 10^{-34} \times 3.0 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-19} \times 4.4 \times 10^{-10}}$$

$$= 2.8125 \times 10^3 = 2.8 \times 10^3\ \mathrm{eV}$$

(6)　与えられた条件より

$$2d\sin\theta_A = 2(d - \Delta d)\sin(\theta_A - \Delta\theta_A) = 2(d - \Delta d)(\sin\theta_A\cos\Delta\theta_A - \cos\theta_A\sin\Delta\theta_A)$$

$$= 2(d - \Delta d)(\sin\theta_A \cdot 1 - \cos\theta_A \cdot \Delta\theta_A)$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta\theta_A}{\tan\theta_A}$$

(7)　(1)と同様に

$$\lambda_2 = \frac{h}{\sqrt{2me(V + V_0)}} \qquad \therefore\quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{V}{V + V_0}}_{\text{(i)}}$$

また，入射角が $\dfrac{\pi}{2} - \theta_1$，屈折角が $\dfrac{\pi}{2} - \theta_2$ であることに注意して屈折の法則より

$$\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_1\right)}{\lambda_1} = \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_2\right)}{\lambda_2} \qquad \therefore\quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}_{\text{(ii)}}$$

(8)　$2d\sin\theta_2 = \lambda_2$

(9)　(7)と(8)より

$$\frac{V}{V+V_0}=\frac{1-\sin^2\theta_2}{1-\sin^2\theta_1}=\frac{1-\dfrac{{\lambda_2}^2}{4d^2}}{1-\sin^2\theta_1}=\frac{1-\dfrac{1}{4d^2}\cdot\dfrac{h}{2me\,(V+V_0)}}{1-\sin^2\theta_1}$$

$$\therefore\quad V_0=\frac{h^2}{8med^2}-V\sin^2\theta_1$$

(10)　与えられた近似式より

$$\sqrt{\frac{V}{V+V_0}}=\left(1+\frac{V_0}{V}\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{V_0}{V}$$

また，

$$\frac{\cos(\theta_1+\Delta\theta)}{\cos\theta_1}=\frac{\cos\theta_1\cos\Delta\theta-\sin\theta_1\sin\Delta\theta}{\cos\theta_1}=1-\Delta\theta\tan\theta_1$$

よって

$$1-\frac{1}{2}\cdot\frac{V_0}{V}=1-\Delta\theta\tan\theta_1\qquad\therefore\quad\Delta\theta=\frac{V_0}{2V\tan\theta_1}$$

(11)(i)　陽電子は結晶内部では電位差によって減速しド・ブロイ波長が大きくなるため，入射角によっては格子面 1 で全反射を起こしすべて反射されるから。

(ii)　1

(iii)　結晶内部での波長 ${\lambda_2}'$ は ${\lambda_2}'=\dfrac{h}{\sqrt{2me\,(V-V_0)}}$ なので，θ_2 と同様に陽電子の場合の角度 θ' を定めると，

$$\sqrt{\frac{V}{V-V_0}}=\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}$$

が成り立つ。$\cos\theta'=\cos\theta\sqrt{\dfrac{V}{V-V_0}}$ が存在しなければよいので，

$$1<\cos\theta\sqrt{\frac{V}{V-V_0}}\qquad\therefore\quad\frac{V-V_0}{V}<1-\sin^2\theta\qquad\therefore\quad\sin\theta\underset{(1)}{<}\sqrt{\frac{V_0}{V}}_{(2)}$$