東京医科歯科大学（前期）【物理】解答例

1

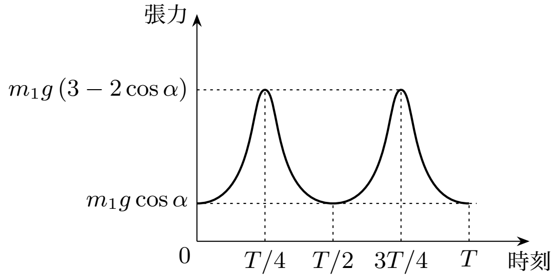
問 1 (1)　角度が θ_1 のときの小球 1 の速さを v とすると，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m_1v^2 = mgL\left(\cos\theta_1 - \cos\alpha\right) \qquad \therefore \quad v = \sqrt{2gL\left(\cos\theta_1 - \cos\alpha\right)}$$

(2)　張力を S とすると，遠心力を含めた糸方向の力のつり合いより

$$S = m_1g\cos\theta_1 + \frac{m_1v^2}{L} = m_1g\left(3\cos\theta_1 - 2\cos\alpha\right)$$

(3)



(4)　単振り子の周期となるから

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

(5)　大小関係　$T_{\pi/3} > T_0$

理由：角度が θ_1，振り子の振れが $x = L\theta_1$ のとき，接線方向の復元力の大きさは $F = m_1g\sin\theta_1 = m_1g\sin\dfrac{x}{L}$ となる。θ_1 が十分に小さいときは，$F = \dfrac{m_1g}{L}x$ と近似できるが，θ_1 が大きくなると，$|\sin\theta_1| < |\theta_1|$ より $|F| = m_1g\left|\sin\dfrac{x}{L}\right| < \dfrac{mg}{L}|x|$ となる。すなわち，単振動と考えたときより復元力の大きさは小さくなるので，周期は長くなる。

問 2 (1)　力学的エネルギー保存則より，$V = \sqrt{2gL\left(1 - \cos\beta\right)}$

(2)　運動量保存則および反発係数の式より

$$\begin{cases} m_1v_1(1) + m_2v_2(1) = m_1\cdot(-V) \\ v_1(1) - v_2(1) = V \end{cases} \qquad \text{この 2 式より} \quad \frac{v_1(1)}{V} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

(3)　1 回目の衝突直後と 2 回目の衝突直前では，速度の符号が逆になることを考慮して

$$\begin{cases} m_1v_1(2) + m_2v_2(2) = m_1V \\ v_1(2) - v_2(2) = V \end{cases} \qquad \text{この 2 式より} \quad \frac{v_1(2)}{V} = 1$$

(4)　前問と同様に

$$\begin{cases} m_1 v_1(n) + m_2 v_2(n) = (-1)^n m_1 V \\ v_1(n) - v_2(n) = V \end{cases}$$

上の 2 式より

$$v_1(n) = \frac{(-1)^n m_1 + m_2}{m_1 + m_2} V \quad \rightarrow \quad v_1(n) = (-1)^n V \quad \left(m_1 \gg m_2 \text{ のとき}\right)$$

$$v_2(n) = \frac{\{(-1)^n - 1\} m_1}{m_1 + m_2} V \quad \rightarrow \quad v_2(n) = \{(-1)^n - 1\} V \quad \left(m_1 \gg m_2 \text{ のとき}\right)$$

これより

$$v_1(n) = \begin{cases} V & \left(n \text{ が偶数}\right) \\ -V & \left(n \text{ が奇数}\right) \end{cases}$$

となる。速さ V のときの振れ角が β であり，振れ角と最大速度は比例することより

$-\beta \leqq \theta_1 \leqq \beta$

同様に，

$$v_2(n) = \begin{cases} 0 & \left(n \text{ が偶数}\right) \\ -2V & \left(n \text{ が奇数}\right) \end{cases}$$

であるから　$-2\beta \leqq \theta_2 \leqq 0$

(5)　運動量保存則および反発係数の式より

$$\begin{cases} m_1 v_1(1) + m_2 v_2(1) = m_1 \cdot (-V) \\ v_1(1) - v_2(1) = eV \end{cases}$$

これより

$$\frac{v_1(1)}{V} = \frac{-m_1 + e m_2}{m_1 + m_2}$$

(6)　k 番目の衝突についての反発係数の式より

$$\begin{aligned} v_1(k) - v_2(k) &= -e\{-v_1(k-1) - (-v_2(k-1))\} \\ &= e\{v_1(k-1) - v_2(k-1)\} \end{aligned}$$

が成り立つから，

$$v_1(n) - v_2(n) = e^{n-1}\{v_1(1) - v_2(1)\} = e^n V$$

(7)　運動量保存則は

$$m_1 v_1(n) + m_2 v_2(n) = (-1)^n m_1 V$$

であるから，(6)の結果とあわせて

$$\frac{v_1(n)}{V} = \frac{(-1)^n m_1 + e^n m_2}{m_1 + m_2}$$

2

問 1 (1)　$\dfrac{l_2\omega_\mathrm{c}}{2}$　　(2)　ab：$\dfrac{\omega_\mathrm{c}Bl_1l_2\sin\omega_\mathrm{c}t}{2}$，bc：0　　(3)　$Bl_1l_2\cos\omega_\mathrm{c}t$

(4)　与えられた式より，

$$\begin{aligned}\varDelta\varPhi &= Bl_1l_2\cos(\omega_\mathrm{c}t+\omega_\mathrm{c}\varDelta t)-Bl_1l_2\cos\omega_\mathrm{c}t\\ &= Bl_1l_2\left(\cos\omega_\mathrm{c}t\cos\omega_\mathrm{c}\varDelta t-\sin\omega_\mathrm{c}t\sin\omega_\mathrm{c}\varDelta t-\cos\omega_\mathrm{c}t\right)\\ &\fallingdotseq Bl_1l_2\left(\cos\omega_\mathrm{c}t-\sin\omega_\mathrm{c}t\cdot\omega_\mathrm{c}\varDelta t-\cos\omega_\mathrm{c}t\right)\\ &= -\omega_\mathrm{c}Bl_1l_2\sin\omega_\mathrm{c}t\times\varDelta t\end{aligned}$$

よって

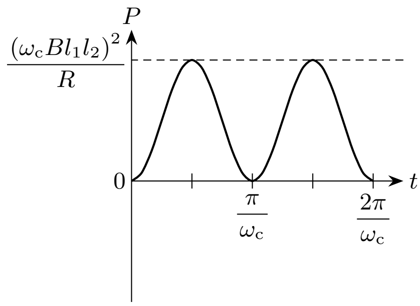
$$A=-\omega_\mathrm{c}Bl_1l_2\sin\omega_\mathrm{c}t$$

(5)　前問の結果より，方向に気をつけて $\omega_\mathrm{c}Bl_1l_2\sin\omega_\mathrm{c}t$

(6)　電流の最大値が $\dfrac{\omega_\mathrm{c}Bl_1l_2}{R}$ なので，実効値は $\dfrac{\omega_\mathrm{c}Bl_1l_2}{\sqrt{2}R}$

(7)　電流は $\dfrac{\omega_\mathrm{c}Bl_1l_2}{R}\sin\omega_\mathrm{c}t$ なので，消費電力は

$$\begin{aligned}P &= R\left(\frac{\omega_\mathrm{c}Bl_1l_2}{R}\sin\omega_\mathrm{c}t\right)^2\\ &= \frac{(\omega_\mathrm{c}Bl_1l_2)^2}{R}\sin^2\omega_\mathrm{c}t\end{aligned}$$



問 2 (1)　抵抗：$RI_0\sin\omega t$，コンデンサ：$-\dfrac{I_0}{\omega C}\cos\omega t$

コイル：$\omega LI_0\cos\omega t$

(2)　キルヒホッフの第二法則より，

$$\begin{aligned}V_0\sin(\omega t+\beta) &= RI_0\sin\omega t-\frac{I_0}{\omega C}\cos\omega t+\omega LI_0\cos\omega t\\ &= I_0\left\{R\sin\omega t+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\cos\omega t\right\}\\ &= I_0\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\sin(\omega t+\beta)\end{aligned}$$

と式変形できるので，

$$I_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}$$

$$\tan\beta = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$$

(3)　前問の I_0 の分母が最小になればよいので，

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad \therefore \quad \omega_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{\sqrt{CL}}}$$

このときの最大値は $\underset{\sim\sim}{\frac{V_0}{R}}$

(4)　(2)の I_0 より，ω が小さいとき，

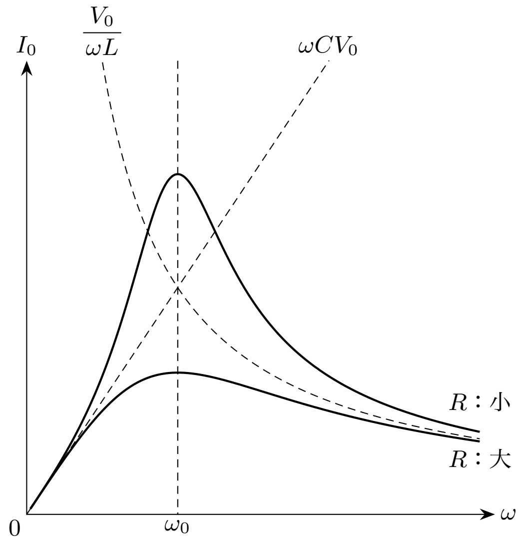
$$I_0 \fallingdotseq \frac{V_0}{\frac{1}{\omega C}}$$

$$= \underset{\sim\sim\sim}{\omega C V_0}$$

ω が大きいとき，

$$I_0 \fallingdotseq \underset{\sim\sim}{\frac{V_0}{\omega L}}$$

に漸近する。グラフの概形は右図。R が大きいときには 2 本の漸近線の下側に，R が小さいときには 2 本の漸近線の上側に概形の異なる 2 つの曲線が描けるが，どちらかが描けていればよいだろう。



(5)　(2)の I_0 より，ω_1 と ω_2 は，

$$R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 2R^2 \quad \cdots\cdots ①$$

の 2 解であると考えられる。整理して，

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R$$

$+R$ に対して，

$$\omega^2 LC - R\omega C - 1 = 0 \quad \therefore \quad \omega = \frac{RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

$-R$ に対して，

$$\omega^2 LC + R\omega C - 1 = 0 \quad \therefore \ \ \omega = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

$\omega > 0$ と $\omega_2 > \omega_1$ を考えると

$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{-RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} \\[2ex] \omega_2 = \dfrac{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} \end{cases} \quad \therefore \ \ \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

【別解】

$\omega_1{}^2$ と $\omega_2{}^2$ は①式を変形した

$$(\omega^2)^2 - \left(\frac{2}{CL} + \frac{R^2}{L^2}\right)\omega^2 + \frac{1}{C^2L^2} = 0$$

の解であるから，解と係数の関係より，

$$\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 = \frac{2}{CL} + \frac{L^2}{R^2}$$

$$\omega_1{}^2\omega_2{}^2 = \frac{1}{C^2L^2} \quad \therefore \ \ \omega_1\omega_2 = \frac{1}{CL}$$

一方で，

$$\begin{aligned} (\omega_2 - \omega_1)^2 &= \omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 - 2\omega_1\omega_2 \\ &= \frac{R^2}{L^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \ \ \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$