2024　東京医科歯科大学 医学科 数学 解答例

1

(1)　$(*)$ の左辺について

$$a_1 + a_2 + a_3 \leqq a_3 + a_3 + a_3 = 3a_3$$

が成り立つので，$(*)$ より

$$3a_3 \geqq a_1 a_2 a_3$$

これと $a_3 > 0$ より

$$a_1 a_2 \leqq 3$$

が成り立つ。このとき，$1 \leqq a_1 \leqq a_2$ より

$$(a_1, a_2) = (1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3)$$

である。以下それぞれの場合について考える。

(I)　$(a_1, a_2) = (1, 1)$ のとき，$(*)$ より

$$a_3 + 2 = a_3$$

となるが，これを満たす a_3 は存在しない。

(II)　$(a_1, a_2) = (1, 2)$ のとき，$(*)$ より

$$a_3 + 3 = 2a_3$$

これを解くと $a_3 = 3$ であり，これは適する。

(III)　$(a_1, a_2) = (1, 3)$ のとき，$(*)$ より

$$a_3 + 4 = 3a_3$$

これを解くと $a_3 = 2$ だが，これは条件 $a_2 \leqq a_3$ に反し，不適である。

以上より

$$(a_1, a_2, a_3) = \underline{(1, 2, 3)}$$

である。

(2)　自然数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n を小さい方から順に並べたものを b_1，b_2，$\cdots$，b_n とすると，$(*)$ の左辺，右辺がいずれも a_1，a_2，$\cdots$，a_n の対称式であることより，自然数の組 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ も $(*)$ の解である。
このとき，$(*)$ の左辺に条件 $b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n$ を適用すると

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leqq b_n + b_n + \cdots + b_n = nb_n$$

であるので，$(*)$ より

$$nb_n \geqq b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_n$$

これと $b_n > 0$ より

$$b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_{n-1} \leqq n$$

が成り立つ。
ここで，$a_i = 1$ となるような i が存在しないと仮定すると，$2 \leqq b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_{n-1}$ が成り立つので

$$b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_{n-1} \geqq 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{n-1}$$

以上より

$$2^{n-1} \leqq n$$

が成り立つことが示される。
ところが一般に，以下のように数学的帰納法による証明を行うことで，3 以上の整数 n について

$$2^{n-1} > n$$

が成り立つことが証明できる。

(証明)　$n = 3$ のとき，$2^{3-1} = 4 > 3$ より成り立つ。
$k \geqq 3$ について，$n = k$ のとき成り立つと仮定すると，$2^{k-1} > k$ であるので

$$2^k - (k+1) > 2k - (k+1) = k - 1 > 0$$

よって，$2^k > k + 1$ である。 (証明終)

以上より，背理法を適用して $a_i = 1$ となるような i が少なくとも 1 つ存在することが示された。

(3)　n の値で場合分けして考える。

(I)　$n = 2$ のとき，$a_1 = a_2 = 1$ は $(*)$ を満たさない。
よってこのとき，$a_i = 1$ となる i は高々 1 個であり，不適である。

(II)　$n = 3$ のとき，(1) より $(*)$ のすべての解 (a_1, a_2, a_3) は自然数 1，2，3 を並び替えたものであるため，$a_i = 1$ となる i はただ 1 つとなり，不適である。

(III)　$n = 4$ のとき，$a_i = 1$ となるような i がちょうど 2 個存在するような $(*)$ の解の 1 つとして

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 2, 4)$$

が存在する。

(IV)　$n=5$ のとき，$a_i=1$ となるような i がちょうど 2 個存在するような $(*)$ の解の 1 つとして

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 1, 2, 2, 2)$$

が存在する。

(V)　$n \geqq 6$ のとき，$b_1 = b_2 = 1$，$b_3 \leqq b_4 \leqq \cdots \leqq b_n$ より

$$2 + (n-2)b_n \geqq b_3 \times b_4 \times \cdots \times b_n$$
$$b_3 \times b_4 \times \cdots \times b_{n-1} \leqq n - 2 + \frac{2}{b_n}$$

が成り立つ。
ここで，$2 \leqq b_3 \leqq b_4 \leqq \cdots \leqq b_{n-1}$ より

$$b_3 \times b_4 \times \cdots \times b_{n-1} \geqq 2^{n-3}$$

である。
一方，$b_n \geqq b_3 \geqq 2$ より

$$n - 2 + \frac{2}{b_n} \leqq n - 1$$

である。
ゆえに

$$2^{n-3} \leqq n - 1$$

となる。
ところが，(2) の証明と同様にして $n \geqq 6$ のとき

$$2^{n-3} > n - 1$$

が成り立つことが示される。
背理法を適用して，$n \geqq 6$ のときは $a_i = 1$ となるような i がちょうど 2 個となるような解の組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ は存在しない。

以上より，求める n の値は

$$n = 4,\ 5$$

である。

2

(1)　P = N，Q = M の場合を考える。
このとき，線分 BD 上の点で，点 $\mathrm{M}\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ と x 座標も y 座標も等しい点は存在しないので，線分 BD 上の任意の点 N について t_2 を定義することができ，このとき

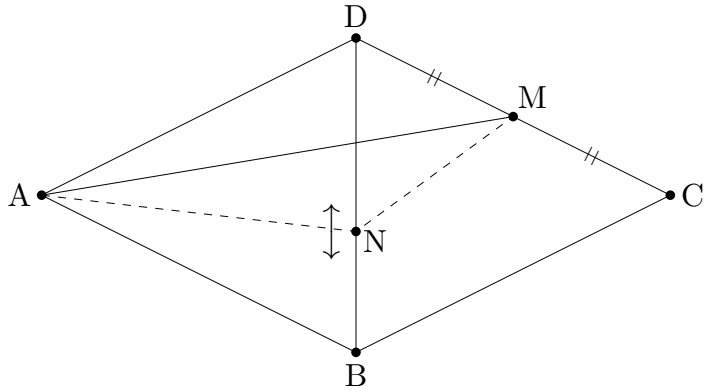
$$\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2} \neq 0$$

が成り立つ。
ここで，$t_2 = 0$ とすると，$z' - z = 0$ が成り立つので，2 点 N，M の z 座標が等しい。
M の z 座標は $\frac{1}{2}$ であるので，N の z 座標も $\frac{1}{2}$ となり，このとき 2 点 B，D の z 座標に注目することで，点 N は線分 BD の中点である。
ゆえに，$\mathrm{N}\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ となり，このとき符号に注意して t_1 を求めると

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

である。

(2)　四面体 ABCD の展開図から，2 つの面 ABD，CBD を取り出したものを考える。



これより，線分 BD 上を点 N が動いたときの l の最小値は，この図における線分 AM の長さに一致する。
ここで，三角形 ABD，CBD がいずれも，1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正三角形であることに注意すると，余弦定理を用いて l の最小値 m は

$$m^2 = (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 120^\circ = \frac{7}{2}$$

$$m = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

であることが分かる。

(2) の別解

点 N の y 座標を k とおき，l を k で表して最小値を考える方法でも求めることができる。

点 N の y 座標を k とおくと，N の座標は $(0, k, 1-k)$ と表されるので

$$\mathrm{AN}^2 = 2(k^2 - k + 1)$$
$$\mathrm{NM}^2 = 2\left(k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}\right)$$

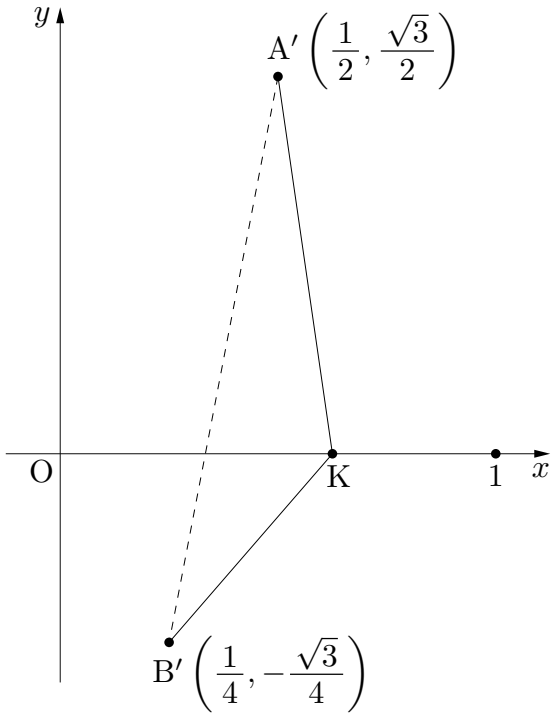
よって，l は k を用いて

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{2}\left(\sqrt{k^2 - k + 1} + \sqrt{k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}}\right) \\ &= \sqrt{2}\left\{\sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}\right\} \end{aligned}$$

と表される。ここで

$$l' = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}$$

とおき, 座標平面上の 2 定点 $\mathrm{A}'\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathrm{B}'\left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, および x 軸上の $0 < x < 1$ の部分を動く点 $\mathrm{K}(k, 0)$ を考えると，l' は 2 線分 $\mathrm{A'K}$，$\mathrm{B'K}$ の長さの和を表す式である。



x 軸について 2 点 A'，B' が反対側にあることと，線分 $\mathrm{A'B'}$ と x 軸の共有点の x 座標が $0 < x < 1$ を満たすことより，l' は点 K が線分 $\mathrm{A'B'}$ と x 軸の共有点となるとき最小となり，その値は線分 $\mathrm{A'B'}$ の長さの値に一致する。よって，l' の最小値は

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

となり，対応する l の最小値は

$$\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

である。

(2) の別解で，導関数を利用して l の最小値を求める場合の注意

(2) の別解において登場した式 $\sqrt{k^2-k+1}+\sqrt{k^2-\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}$ について

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}\quad(\text{ただし } 0<x<1)$$

とし，導関数を利用し最小値を求める場合は，計算量が極めて多くなる上に，$f'(x)$ の符号を x で場合分けをして考える必要がある。以下でこれについて簡単に紹介する。

$f(x)$ の導関数を求めると

$$f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{2x-\frac{1}{2}}{2\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}}\quad\cdots①$$

よって，$0<x<\frac{1}{4}$ のとき 2 項はともに負となり $f'(x)<0$ である。
また，$\frac{1}{2}<x<1$ のとき 2 項はともに正となり $f'(x)>0$ である。
$\frac{1}{4}\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ のときは，①を更に変形して

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{\left(2x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2-x+1}-(1-2x)\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}}\\&=\frac{9}{8\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}}\\&\qquad\times\frac{x\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(2x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2-x+1}+(1-2x)\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}}\end{aligned}$$

$\frac{1}{4}\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ のとき，分母の式 $\left(2x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2-x+1}+(1-2x)\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}$ の 2 項はいずれも 0 以上で，かつ 2 項が同時に 0 となることはないことを利用すると，$f(x)$ の $0<x<1$ での $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$	

代々木ゼミナール

ゆえに，$l=\sqrt{2}\,f(x)$ は $x=\dfrac{1}{3}$ のとき最小となり，そのときの l の値は

$$l=\sqrt{2}\times f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

である。

(3)　N の y 座標が s のとき，点 N の座標は $(0,s,1-s)$ となるので

$$t_1=\frac{1-s}{\sqrt{s^2+1}},\ t_2=\frac{2s-1}{\sqrt{4s^2+1}}$$

これより，$0\leqq t_2\leqq t_1$ が成り立つとき

$$0\leqq\frac{2s-1}{\sqrt{4s^2+1}}\leqq\frac{1-s}{\sqrt{s^2+1}}\quad\cdots(*)$$

である。
ここで，$(*)$ の左側の不等式が成り立つための s の条件は $s\geqq\dfrac{1}{2}$ であり，このとき $(*)$ の右側の不等式が成り立つための条件は

$$\left(\frac{2s-1}{\sqrt{4s^2+1}}\right)^2\leqq\left(\frac{1-s}{\sqrt{s^2+1}}\right)^2$$
$$\frac{(2s-1)^2}{4s^2+1}\leqq\frac{(1-s)^2}{s^2+1}$$

$4s^2+1\geqq s^2+1>0$ より

$$(2s-1)^2(s^2+1)\leqq(1-s)^2(4s^2+1)$$
$$s\leqq-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\leqq s\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

条件 $s\geqq\dfrac{1}{2}$ と，N が線分 BD 上にあるための条件 $0<s<1$ を合わせて

$$\frac{1}{2}\leqq s\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

である。

((注)) 本問では，線分 PQ の定義が「両端の点 P，Q をいずれも含まない」ものであるとして議論を行った。
線分 PQ の定義が「両端の点 P，Q をいずれも含む」ものであるとした場合は，設問 (2)，(3) の解答例中の条件 $0<x<1$ や $0<s<1$ が等号付きの不等式 $0\leqq x\leqq 1$ や $0\leqq s\leqq 1$ に変更になるなど，一部の式の等号の有無が変化する。ただし，この場合も同じ最終結果が得られる。

3

(1) $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ とすると

$$\frac{dt}{dx} = -1$$

また，x と t の対応は次のようになっている。

x	0	$\longrightarrow$	$\dfrac{\pi}{2}$
t	$\dfrac{\pi}{2}$	$\longrightarrow$	0

よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cdot(-dt)\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2t)\cos t\,dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,dx\end{aligned}$$

である。

(2) $\sin x - \cos x = t$ とおくと

$$\frac{dt}{dx} = \sin x + \cos x$$

また

$$t^2 = 1 - 2\sin x\cos x = 1 - \sin 2x$$

より

$$\sin 2x = 1 - t^2$$

である。

更に，$t = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ であるので，x と t の対応は次のようになっている。

x	0	$\longrightarrow$	$\dfrac{\pi}{2}$
t	-1	$\longrightarrow$	1

以上より

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x + \cos x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\frac{dt}{dx}\,dx\\ &= \int_{-1}^1 f(1-t^2)dt\end{aligned}$$

である。

(3)　(1)，(2) より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x+\cos x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(1-t^2)dt$$

が成り立つ。

よってこれを，$f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ で適用すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}dt$$

ここで，t の関数 $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}$ は偶関数であるので

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{1}\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}dt$$

更に，$t=\sin\theta$ と置くと

$$\frac{dt}{d\theta}=\cos\theta$$

また，t と θ の対応は次のようになっている。

t	0	$\longrightarrow$	1
θ	0	$\longrightarrow$	$\dfrac{\pi}{2}$

よって

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{1+\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{1+|\cos\theta|}d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)d\theta \\
&= \left[\theta-\tan\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2}-1
\end{aligned}$$

である。