令和 2 (2020) 年度　東京医科歯科大学　医学部医学科　数学　解答例

$\boxed{1}$

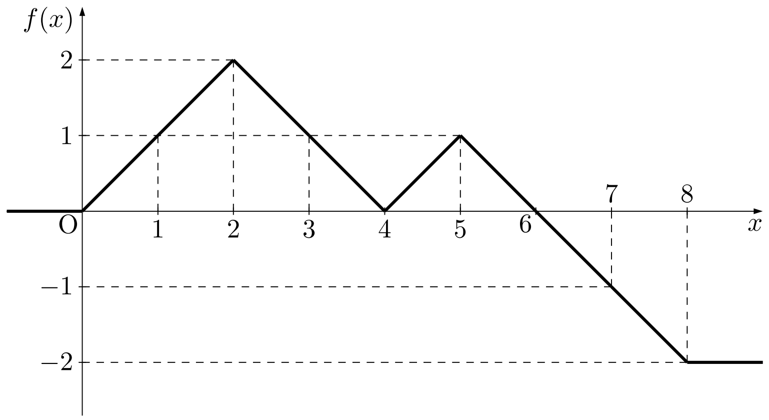
(1)

$$(x-n+1)f(n)+(n-x)f(n-1)=f(n-1)+\{x-(n-1)\}\{f(n)-f(n-1)\}$$

となるので，3. の条件は，x が $0<x<N$ を満たし，かつ自然数でないとき，$n-1<x<n$ を満たす自然数を n に対して，$f(x)$ のグラフが，2 点 $(n-1,\ f(n-1))$，$(n,\ f(n))$ を通る直線の一部になることを意味する．他の条件も合わせると，$f(x)$ は実数全体で連続なグラフとなる．このことと

$$f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=1,\ f(4)=0,\ f(5)=1,\ f(6)=0,\ f(7)=-1,\ f(8)=-2$$

に注意して，次のグラフを得る．



(2)　$1 \leqq n \leqq N-1$ を満たす n について，$f(x)$ が $x=n$ で極値をとる条件は

(i)　n 回目に表が出て，かつ $n+1$ 回目に裏が出る

(ii)　n 回目に裏が出て，かつ $n+1$ 回目に表が出る

のいずれかが起きるときである．

- $N=1$ のとき　極値をとることはないので

$$P(k)=\begin{cases}1 & (k=0)\\ 0 & (k \geqq 1)\end{cases}$$

- $N \geqq 2$ のとき
  $k>N-1$ の場合，極値をとる点が $N-1$ 個より多くなることはないから，$P(k)=0$ である．
  $0 \leqq k \leqq N-1$ の場合，極値をとる点を $N-1$ 個中 k 個選ぶことを考え

$$P(k)=2\cdot {}_{N-1}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^N=\frac{(N-1)!}{k!(N-k-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

であり，これは $N=1$ のときでも成り立つ．

したがって，求める $P(k)$ は，

$$P(k)=\begin{cases}\dfrac{(N-1)!}{k!(N-k-1)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1} & (0 \leqq k \leqq N-1)\\ 0 & (k \geqq N)\end{cases}$$

(3)　$f(n)$ が極大となるのは，「n 回目に表が出て，かつ $n+1$ 回目に裏が出るとき」である．よって，隣接する 2 つの極大値をとる l, m $(l<m)$ について，l 回目から m 回目の間に裏から表に 1 度のみ変化していることから $l<x<m$ で $f(x)$ が極小となる点がただ 1 つ存在する．

(i) 1 回目が表のとき

極大となる点が k 個となるとき，極小となる点は $k-1$ 個または k 個ある．したがって，極値をとる点は $2k-1$ 個または $2k$ 個ある．よって，k の範囲は $0 \leqq 2k-1 \leqq N-1$ または $0 \leqq 2k \leqq N-1$，すなわち，$0 \leqq k \leqq \dfrac{N}{2}$ である．

(ii) 1 回目が裏のとき

極大となる点が k 個となるとき，極小となる点は k 個または $k+1$ 個ある．したがって，極値をとる点は $2k$ 個または $2k+1$ 個ある．よって，k の範囲は $0 \leqq 2k \leqq N-1$ または $0 \leqq 2k+1 \leqq N-1$，すなわち，$1 \leqq k \leqq \dfrac{N-1}{2}$ である．

(i)(ii) より，

- $1 \leqq k \leqq \dfrac{N}{2}-1$ のとき

$$\begin{aligned}Q(k)&=\frac{1}{2}\{P(2k-1)+P(2k)\}+\frac{1}{2}\{P(2k)+P(2k+1)\}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^N\{({}_{N-1}\mathrm{C}_{2k-1}+{}_{N-1}\mathrm{C}_{2k})+({}_{N-1}\mathrm{C}_{2k}+{}_{N-1}\mathrm{C}_{2k+1})\}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^N({}_N\mathrm{C}_{2k}+{}_N\mathrm{C}_{2k+1})\\&=\frac{{}_{N+1}\mathrm{C}_{2k+1}}{2^N}=\frac{(N+1)!}{(N-2k)!(2k+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^N \quad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

- $k=0$ のとき

$$Q(0)=\frac{1}{2}P(0)\times 2+\frac{1}{2}P(1)=\frac{N+1}{2^N}$$

これは $(*)$ と一致する．

- N が奇数で $k=\dfrac{N-1}{2}$ のとき

$$Q\left(\frac{N-1}{2}\right)=\frac{1}{2}P(N-2)+\frac{1}{2}P(N-1)\times 2=\frac{N+1}{2^N}$$

これは $(*)$ と一致する．

- N が偶数で $k=\dfrac{N}{2}$ のとき

$$Q\left(\frac{N}{2}\right)=\frac{1}{2}P(N-1)=\frac{1}{2^N}$$

これは $(*)$ と一致する．

- $k > \dfrac{N}{2}$ のとき，極値をとる点の個数が $N-1$ 個になり得ないので $Q(k)=0$.

したがって，求める $Q(k)$ は，

$$Q(k) = \begin{cases} \dfrac{(N+1)!}{(N-2k)!(2k+1)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^N & \left(0 \leqq k \leqq \dfrac{N}{2}\right) \\ 0 & \left(k > \dfrac{N}{2}\right) \end{cases}$$

となる．

(4)

$$\begin{aligned} kQ(k) &= \frac{1}{2}kP(2k-1) + \frac{1}{2}kP(2k) + \frac{1}{2}kP(2k) + \frac{1}{2}kP(2k+1) \\ &= \frac{2k-1}{4}P(2k-1) + \frac{2k}{4}P(2k) + \frac{2k}{4}P(2k) + \frac{2k+1}{4}P(2k+1) \\ &\qquad + \frac{1}{4}P(2k-1) - \frac{1}{4}P(2k+1) \end{aligned}$$

となるので，$0 \leqq k \leqq N-1$ 以外では $P(k)=0$ であることに注意して

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} kQ(k) &= \sum_{k=0}^{N}\left\{\frac{2k-1}{4}P(2k-1) + \frac{2k}{4}P(2k) + \frac{2k}{4}P(2k) + \frac{2k+1}{4}P(2k+1)\right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{4}P(2k-1) - \frac{1}{4}P(2k+1)\right\} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{N} lP(l) + \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{N} lP(l) + \sum_{k=0}^{N}\left\{\frac{1}{4}P(2k-1) - \frac{1}{4}P(2k+1)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{N} lP(l) \end{aligned}$$

となる．(2) より

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N} lP(l) &= \sum_{l=1}^{N-1} l\,{}_{N-1}\mathrm{C}_l \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\sum_{l=1}^{N-1}(N-1)_{N-2}\mathrm{C}_{l-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}(N-1)2^{N-2} \qquad \text{(二項定理を用いた)} \\ &= \frac{N-1}{2} \end{aligned}$$

となるので，求める値は

$$\sum_{k=0}^{N} kQ(k) = \frac{1}{2}\cdot\frac{N-1}{2} = \frac{N-1}{4}$$

となる．

$\boxed{2}$

複素数 z の実部を $\mathrm{Re}(z)$ と表す．

(1)　m, k_1, k_2 が実数であることから，$w_0 = (m+i)z,\ w_1 = (k_1+i)z,\ w_2 = (k_2+i)z$ とおくと，C_0, C_1, C_2 はそれぞれ，

$$C_0 : \mathrm{Re}(w_0) = -a$$

$$C_1 : \mathrm{Re}(w_1) = a{k_1}^2$$

$$C_2 : \mathrm{Re}(w_2) = a{k_2}^2$$

と書ける．これらは，いずれも実軸に垂直な直線を表している。w_0, w_1, w_2 はいずれも z にある複素数をかけたものとなっており，これは直線上の点 z を原点を中心に回転・拡大させたものと対応している．したがって，C_0, C_1, C_2 はいずれも直線を表している．

(2)　$\mathrm{P}_1(X+Yi)$ とおくと，P_1 が C_0, C_1 上に存在することから，

$$mX - Y + a = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$k_1X - Y - a{k_1}^2 = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．$m - k_1 = -\sqrt{m^2+1} \fallingdotseq 0$ に注意して，① − ② より，

$$X = -\frac{a(1+{k_1}^2)}{m-k_1} = 2a(m+\sqrt{m^2+1}) = 2ak_1 \qquad \cdots\cdots ③$$

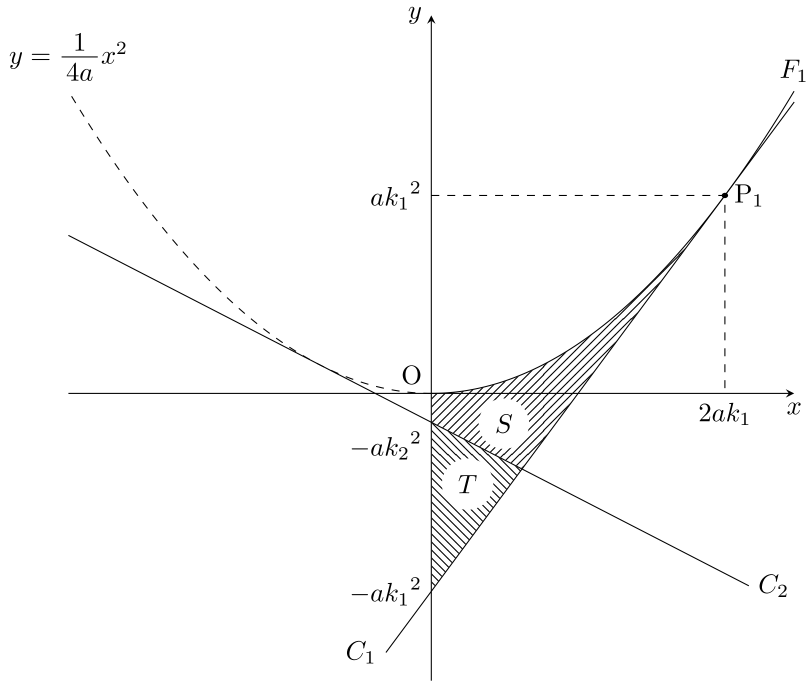
これを②に代入すると，

$$Y = k_1X - a{k_1}^2 = a{k_1}^2 \qquad \cdots\cdots ④$$

である．③，④から k_1 を消去すると，$Y = \dfrac{X^2}{4a}$ を得る．

　ここで，任意の実数 m について，$m < \sqrt{m^2+1}$ が成り立つことから，k_1 は 0 より大きいすべての実数をとる。したがって F_1 は，放物線 $y = \dfrac{x^2}{4a}$ の $x > 0$ の部分 である．

(3)　C_1 は P_1 を接点とする F_1 の接線になっていることに注意すると，T, S はそれぞれ下図の領域の面積である．



図より，

$$\begin{aligned} S+T &= \int_0^{2ak_1} \frac{1}{4a}(x-2ak_1)^2 dx \\ &= \frac{1}{4a}\left[\frac{1}{3}(x-2ak_1)^3\right]_0^{2ak_1} = \frac{2a^2{k_1}^3}{3} \end{aligned}$$

また，C_1 と C_2 の交点の x 座標は $2am$ であることから，$k_1 > k_2, m > 0$ より

$$T = \frac{1}{2}(a{k_1}^2 - a{k_2}^2)\cdot 2am = 4a^2m^2\sqrt{m^2+1}$$

ここで，

$$\frac{S+T}{T} = \frac{S}{T} + 1 = \frac{(m+\sqrt{m^2+1})^3}{6m^2\sqrt{m^2+1}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

であるから，$\dfrac{T}{S}$ は a によらず一定である．また，⑤より，

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{S}{T}+1\right) = \lim_{m\to\infty}\left\{\frac{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\right)^3}{6\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}}\right\} = \frac{4}{3}$$

したがって，求める極限値は，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{T}{S} = \underset{\sim}{3}$ となる．

$\boxed{3}$

(1)　四面体 OPQR は 1 辺の長さ $\sqrt{2}$ の正四面体であるから

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3=\underset{\sim\sim}{\frac{1}{3}}$$

となる．

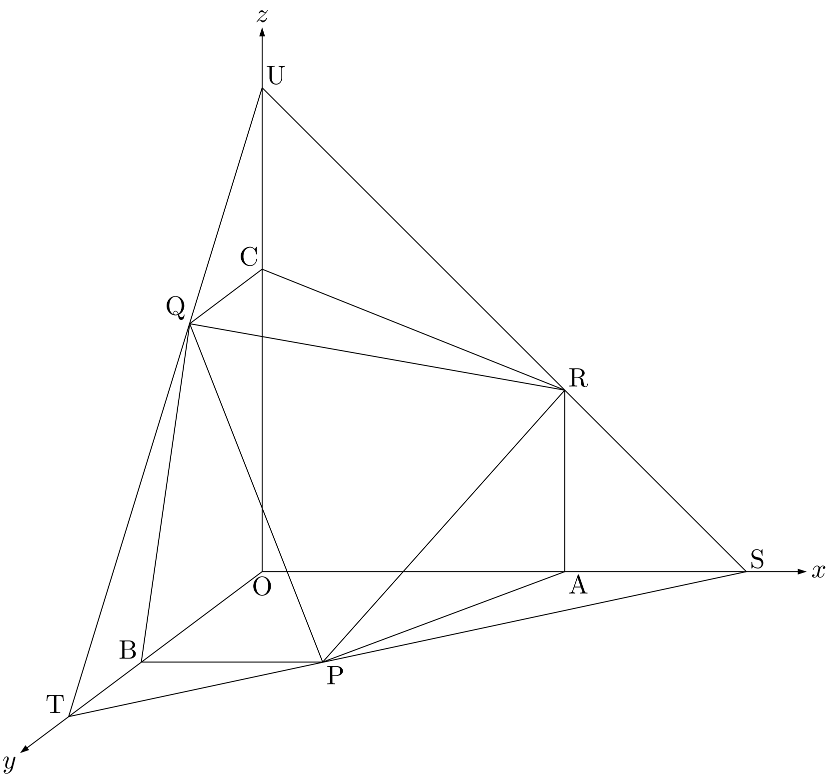
(2)　3 点 P，Q，R を通る平面と x 軸，y 軸，z 軸との交点をそれぞれ S，T，U とすると

$$\mathrm{S}(1+t,\ 0,\ 0),\ \mathrm{T}(0,\ 1+t,\ 0),\ \mathrm{U}(0,\ 0,\ 1+t)$$

である．V_1 は四面体 OSTU の体積から，3 つの四面体 SAPR，TBQP，UCRQ の体積を引いたものであるから

$$\begin{aligned}V_1&=\frac{1}{6}\mathrm{OS}\cdot\mathrm{OT}\cdot\mathrm{OU}-\frac{1}{3}\triangle\mathrm{SAP}\cdot\mathrm{AR}-\frac{1}{3}\triangle\mathrm{TBQ}\cdot\mathrm{BP}-\frac{1}{3}\triangle\mathrm{UCR}\cdot\mathrm{CQ}\\&=\frac{(t+1)^3}{6}-\frac{t^2}{6}-\frac{t^2}{6}-\frac{t^2}{6}\\&=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{t^3+3t+1}{6}}\end{aligned}$$

となる．



(3)　$\mathrm{OP}^2 = t^2 + 1$ であるから

$$V_2 = \frac{4\pi}{3}\mathrm{OP}^3 = \frac{4\pi}{3}(t^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

であるから

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{t^3+3t+1}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{V_1}{V_2} &= \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{(3t^2+3)(t^2+1)^{\frac{3}{2}} - (t^3+3t+1)\cdot\frac{3}{2}\cdot 2t(t^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(t^2+1)^3} \\ &= \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{-3(t^2+t-1)}{(t^2+1)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} - t\right)\left(t + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{(t^2+1)^{\frac{5}{2}}}\end{aligned}$$

から，増減表は次の通り．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	(∞)
$\frac{d}{dt}\frac{V_1}{V_2}$		$+$	0	$-$	
$\frac{V_1}{V_2}$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

よって，求める t の値は

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

となる．