

2024 東京医科歯科大学 歯学科・保健衛生学科検査技術学専攻 数学解答例

1(1) $n = 2$ のとき (*) より

$$a_1 + a_2 = a_1 a_2$$

$$(a_1 - 1)(a_2 - 1) = 1$$

 a_1, a_2 は自然数より, $a_1 - 1 \geq 0, a_2 - 1 \geq 0$ が成り立つので

$$(a_1 - 1, a_2 - 1) = (1, 1)$$

$$(a_1, a_2) = \underline{\underline{(2, 2)}}$$

である。

(2) $n = 3$ のとき (*) の左辺について

$$a_1 + a_2 + a_3 \leq a_3 + a_3 + a_3 = 3a_3$$

が成り立つので, (*) より

$$3a_3 \geq a_1 a_2 a_3$$

これと $a_3 > 0$ より

$$a_1 a_2 \leq 3$$

が成り立つ。このとき, $1 \leq a_1 \leq a_2$ より

$$(a_1, a_2) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$$

である。以下それぞれの場合について考える。

(I) $(a_1, a_2) = (1, 1)$ のとき, (*) より

$$a_3 + 2 = a_3$$

となるが, これを満たす a_3 は存在しない。(II) $(a_1, a_2) = (1, 2)$ のとき, (*) より

$$a_3 + 3 = 2a_3$$

これを解くと $a_3 = 3$ であり, これは適する。(III) $(a_1, a_2) = (1, 3)$ のとき, (*) より

$$a_3 + 4 = 3a_3$$

これを解くと $a_3 = 2$ だが, これは条件 $a_2 \leq a_3$ に反し, 不適である。

以上より

$$(a_1, a_2, a_3) = \underline{\underline{(1, 2, 3)}}$$

である。

(3) (*) の左辺に条件 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ を適用すると

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_n + a_n + \dots + a_n = na_n$$

であるので, (*) より

$$na_n \geq a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$$

$a_n > 0$ より

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{n-1} \leq n$$

である。

(4) 自然数 a_1, a_2, \dots, a_n を小さい方から順に並べたものを b_1, b_2, \dots, b_n とすると, (*) の左辺, 右辺がいずれも a_1, a_2, \dots, a_n の対称式であることより, 自然数の組 (b_1, b_2, \dots, b_n) も (*) の解である。

すると, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ より (3) が適用することができ

$$b_1 \times b_2 \times \dots \times b_{n-1} \leq n$$

が成り立つ。

ここで, $a_i = 1$ となるような i が存在しないと仮定すると, $2 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{n-1}$ が成り立つので

$$b_1 \times b_2 \times \dots \times b_{n-1} \geq 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^{n-1}$$

これより

$$2^{n-1} \leq n$$

が成り立つことが示される。

ところが一般に, 以下のように数学的帰納法による証明を行うことで, 3以上の整数 n について

$$2^{n-1} > n$$

が成り立つことが証明できる。

(証明) $n = 3$ のとき, $2^{3-1} = 4 > 3$ より成り立つ。

$k \geq 3$ として, $n = k$ のとき成り立つと仮定すると, $2^{k-1} > k$ であり, このとき

$$2^k - (k+1) > 2k - (k+1) = k - 1 > 0$$

よって、 $2^k > k + 1$ である。

(証明終)

以上より、背理法を適用して $a_i = 1$ となるような i が少なくとも 1 つ存在することが示された。

2

(1) $P = N$, $Q = M$ の場合を考える。

このとき、線分 BD 上の点で、点 $M\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ と x 座標も y 座標も等しい点は存在しないので、線分 BD 上の任意の点 N について t_2 を定義することができ、このとき

$$\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \neq 0$$

が成り立つ。

ここで、 $t_2 = 0$ とすると、 $z' - z = 0$ が成り立つので、2点 N, M の z 座標が等しい。

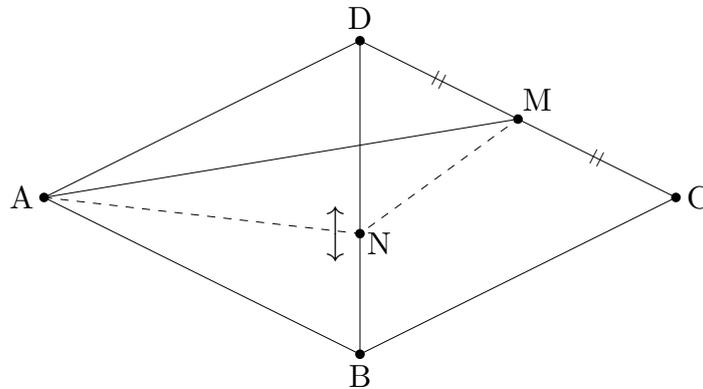
M の z 座標は $\frac{1}{2}$ であるので、N の z 座標も $\frac{1}{2}$ となり、このとき2点 B, D の z 座標に注目することで、点 N は線分 BD の中点である。

ゆえに、 $N\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ となり、このとき符号に注意して t_1 を求めると

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{\frac{1}{2} - 0}{\sqrt{(0 - 1)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

である。

(2) 四面体 ABCD の展開図から、2つの面 ABD, CBD を取り出したものを考える。



これより、線分 BD 上を点 N が動いたときの l の最小値は、この図における線分 AM の長さに一致する。

ここで、三角形 ABD, CBD がいずれも、1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正三角形であることに注意すると、余弦定理を用いて l の最小値 m は

$$\begin{aligned} m^2 &= (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(60^\circ + 60^\circ) \\ &= \frac{7}{2} \\ m &= \frac{\sqrt{14}}{2} \end{aligned}$$

であることが分かる。

(2) の別解

点 N の y 座標を k とおき, l を k で表して最小値を考える方法でも求めることができる。

点 N の y 座標を k とおくと, N の座標は $(0, k, 1 - k)$ と表されるので

$$\begin{aligned} AN^2 &= (-1)^2 + k^2 + (1 - k)^2 \\ &= 2(k^2 - k + 1) \\ NM^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + k^2 + \left(1 - k - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 2\left(k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

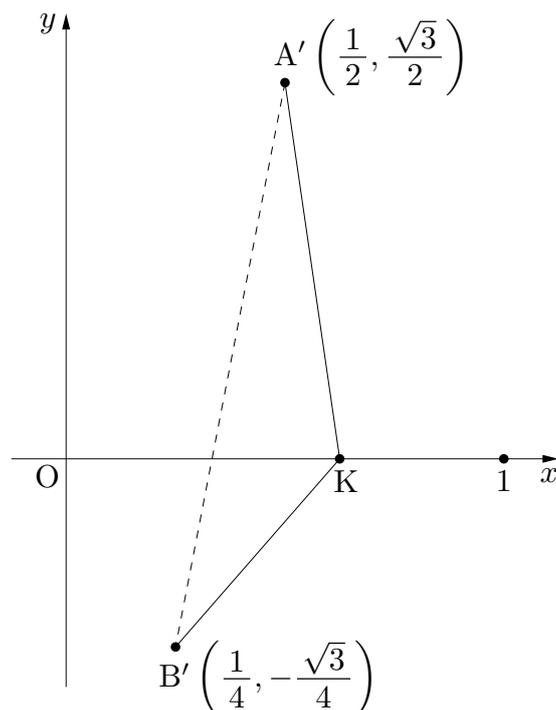
よって, l は k を用いて

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{2} \left(\sqrt{k^2 - k + 1} + \sqrt{k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}} \right) \\ &= \sqrt{2} \left\{ \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} \right\} \end{aligned}$$

と表される。ここで

$$l' = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}$$

とおき, 座標平面上の 2 定点 $A' \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B' \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, および x 軸上の $0 < x < 1$ の部分を動く点 $K(k, 0)$ を考えると, l' は 2 線分 $A'K$, $B'K$ の長さの和を表す式である。



x 軸について2点 A' , B' が反対側にあることと、線分 $A'B'$ と x 軸の共有点の x 座標が $0 < x < 1$ を満たすことより、 l' は点 K が線分 $A'B'$ と x 軸の共有点となる時最小となり、その値は線分 $A'B'$ の長さの値に一致する。よって、 l' の最小値は

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

となり、対応する l の最小値は

$$\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

である。

(2) の別解で、導関数を利用して l の最小値を求める場合の注意

(2) の別解において登場した式 $\sqrt{k^2 - k + 1} + \sqrt{k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}}$ について

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}} \quad (\text{ただし } 0 < x < 1)$$

とし、導関数を利用し最小値を求める場合は、計算量が極めて多くなる上に、 $f'(x)$ の符号を x で場合分けをして考える必要がある。以下でこれについて簡単に紹介する。

$f(x)$ の導関数を求めると

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} + \frac{2x - \frac{1}{2}}{2\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}} \quad \dots \textcircled{1}$$

よって、 $0 < x < \frac{1}{4}$ のとき2項はともに負となり $f'(x) < 0$ である。

また、 $\frac{1}{2} < x < 1$ のとき2項はともに正となり $f'(x) > 0$ である。

$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ のときは、 $\textcircled{1}$ を更に変形して

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(2x - \frac{1}{2}\right) \sqrt{x^2 - x + 1} - (1 - 2x) \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}}{2\sqrt{x^2 - x + 1} \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x + 1} \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}} \\ &\quad \times \frac{\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 (x^2 - x + 1) - (1 - 2x)^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)}{\left(2x - \frac{1}{2}\right) \sqrt{x^2 - x + 1} + (1 - 2x) \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}} \\ &= \frac{9}{8\sqrt{x^2 - x + 1} \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

$$\times \frac{x \left(x - \frac{1}{3}\right)}{\left(2x - \frac{1}{2}\right) \sqrt{x^2 - x + 1} + (1 - 2x) \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}}$$

$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき、分母の式 $\left(2x - \frac{1}{2}\right) \sqrt{x^2 - x + 1} + (1 - 2x) \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}$ の2項はいずれも0以上で、かつ2項が同時に0となることはないことを利用すると、 $f(x)$ の $0 < x < 1$ での $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	(0)	...	$\frac{1}{4}$...	$\frac{1}{3}$...	$\frac{1}{2}$...	(1)
$f'(x)$			-		-	0	+		+
$f(x)$			↘		↘	極小	↗		↗

ゆえに、 $l = \sqrt{2} f(x)$ は $x = \frac{1}{3}$ のとき最小となり、そのときの l の値は

$$l = \sqrt{2} \times f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

である。

(3) N の y 座標が s のとき、点 N の座標は $(0, s, 1 - s)$ となるので

$$t_1 = \frac{(1 - s) - 0}{\sqrt{(0 - 1)^2 + (s - 0)^2}} = \frac{1 - s}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

$$t_2 = \frac{\frac{1}{2} - (1 - s)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2} - 0\right)^2 + (0 - s)^2}} = \frac{2s - 1}{\sqrt{4s^2 + 1}}$$

これより、 $0 \leq t_2 \leq t_1$ が成り立つとき

$$0 \leq \frac{2s - 1}{\sqrt{4s^2 + 1}} \leq \frac{1 - s}{\sqrt{s^2 + 1}} \quad \dots (*)$$

である。

ここで、(*) の左側の不等式が成り立つための s の条件は $s \geq \frac{1}{2}$ であり、このとき (*) の右側の不等式が成り立つための条件は

$$\left(\frac{2s - 1}{\sqrt{4s^2 + 1}}\right)^2 \leq \left(\frac{1 - s}{\sqrt{s^2 + 1}}\right)^2$$

$$\frac{(2s - 1)^2}{4s^2 + 1} \leq \frac{(1 - s)^2}{s^2 + 1}$$

$4s^2 + 1 \geq s^2 + 1 > 0$ より

$$(2s - 1)^2(s^2 + 1) \leq (1 - s)^2(4s^2 + 1)$$

$$s \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq s \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

条件 $s \geq \frac{1}{2}$ と、N が線分 BD 上にあるための条件 $0 < s < 1$ を合わせて

$$\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

である。

((注)) 本問では、線分 PQ の定義が「両端の点 P, Q をいずれも含まない」ものであるとして議論を行った。

線分 PQ の定義が「両端の点 P, Q をいずれも含む」ものであるとした場合は、設問 (2), (3) の解答例中の条件 $0 < x < 1$ や $0 < s < 1$ が等号付きの不等式 $0 \leq x \leq 1$ や $0 \leq s \leq 1$ に変更になるなど、一部の式の等号の有無が変化する。ただし、この場合も同じ最終結果が得られる。

3

(1) $y = \tan \frac{x}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1 + \cos x} \\ &= \frac{1}{1 + \cos x} \end{aligned}$$

である。

(2) $t = \frac{\pi}{2} - x$ とすると

$$\frac{dt}{dx} = -1$$

また、 x と t の対応は次のようになっている。

x	0	→	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	→	0

よって

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \sin x \, dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin 2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cdot (-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(\pi - 2t)) \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2t) \cos t \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \cos x \, dx \end{aligned}$$

である。

(3) $\sin x - \cos x = t$ とおくと

$$\frac{dt}{dx} = \sin x + \cos x$$

また

$$t^2 = 1 - 2 \sin x \cos x = 1 - \sin 2x$$

より

$$\sin 2x = 1 - t^2$$

である。

更に、 $t = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ であるので、 x と t の対応は次のようになっている。

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline t & -1 \longrightarrow 1 \end{array}$$

以上より

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) (\sin x + \cos x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \frac{dt}{dx} dx \\ &= \int_{-1}^1 f(1-t^2) dt \end{aligned}$$

である。

(4) (2), (3) より

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \sin x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) (\sin x + \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(1-t^2) dt \end{aligned}$$

が成り立つ。

よってこれを、 $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ で適用すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} dt$$

ここで、 $g(t) = \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}$ は $g(-t) = g(t)$ を満たし偶関数であるので

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} dt$$

更に、 $t = \sin \theta$ と置くと

$$\frac{dt}{d\theta} = \cos \theta$$

また、 t と θ の対応は次のようになっている。

$$\begin{array}{c|c} t & 0 \longrightarrow 1 \\ \hline \theta & 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

よって, (1) を用いて

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sqrt{\sin 2x}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{1 + \sqrt{1-\sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{1 + |\cos \theta|} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \cos \theta}\right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\theta - \tan \frac{\theta}{2}\right)' d\theta \\ &= \left[\theta - \tan \frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \underbrace{\frac{\pi}{2}} - 1\end{aligned}$$

である。