令和 2 (2020) 年度　東京医科歯科大学
歯学部歯学科・医学部保健衛生学科検査技術学専攻
数学　解答例

$\boxed{1}$

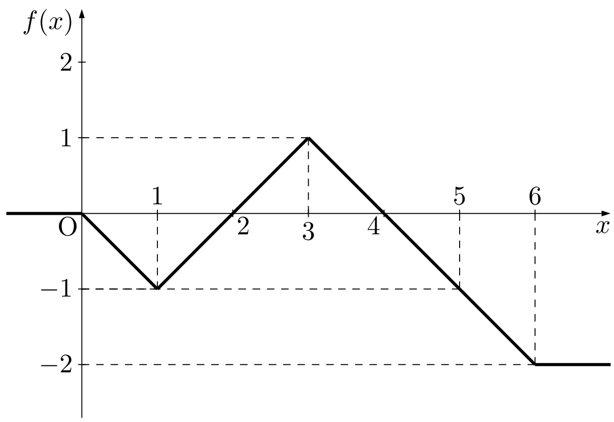
(1)

$$(x-n+1)f(n)+(n-x)f(n-1)=f(n-1)+\{x-(n-1)\}\{f(n)-f(n-1)\}$$

となるので，3. の条件は，x が $0<x<N$ を満たし，かつ自然数でないとき，$n-1<x<n$ を満たす自然数を n として，$f(x)$ のグラフが，2 点 $(n-1,\ f(n-1))$，$(n,\ f(n))$ を通る直線の一部になることを意味する．他の条件も合わせると，$f(x)$ は実数全体で連続なグラフとなる．このことと

$$f(1)=-1,\ f(2)=0,\ f(3)=1,\ f(4)=0,\ f(5)=-1,\ f(6)=-2$$

に注意して，次のグラフを得る．



(2)　$1 \leqq n \leqq N-1$ を満たす n について，$f(x)$ が $x=n$ で極値をもつ条件は

(i)　n 回目に表が出て，かつ $n+1$ 回目に裏が出る

(ii)　n 回目に裏が出て，かつ $n+1$ 回目に表が出る

のいずれかが起きるときである．

$N=6$ のとき $k=1$ となるのは，条件 (i) もしくは (ii) が $1 \leqq n \leqq 5$ の範囲で 1 回だけ起きるときであるから

$$P(1)=2\cdot{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{5}{32}$$

となる．同様に，$k=2$ となるのは，条件 (i) もしくは (ii) が $1 \leqq n \leqq 5$ の範囲で合わせて 2 回起きるとき，$k=3$ となるのは，条件 (i) もしくは (ii) が $1 \leqq n \leqq 5$ の範囲で合わせて 3 回起きると

きであるから

$$P(2)=2\cdot{}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^6=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{5}{16}}$$

$$P(3)=2\cdot{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^6=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{5}{16}}$$

である．

(3) • $N=1$ のとき　極値をとることはないので

$$P(k)=\begin{cases}1 & (k=0)\\ 0 & (k\geqq 1)\end{cases}$$

• $N\geqq 2$ のとき

$k>N-1$ の場合，極値をとる点が $N-1$ 個より多くなることはないから，$P(k)=0$ である．

$0\leqq k\leqq N-1$ の場合，極値をとる点を $N-1$ 個中 k 個選ぶことを考え

$$P(k)=2\cdot{}_{N-1}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^N=\frac{(N-1)!}{k!(N-k-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

であり，これは $N=1$ のときでも成り立つ．

したがって，求める $P(k)$ は，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{P(k)=\begin{cases}\dfrac{(N-1)!}{k!(N-k-1)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1} & (0\leqq k\leqq N-1)\\ 0 & (k\geqq N)\end{cases}}$$

(4) (3) より

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N}kP(k)&=\sum_{k=1}^{N-1}k\,{}_{N-1}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\sum_{k=1}^{N-1}(N-1)_{N-2}\mathrm{C}_{k-1}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}(N-1)2^{N-2}\qquad\text{(二項定理を用いた)}\\&=\underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{N-1}{2}}\end{aligned}$$

である．

$\boxed{2}$

複素数 z の実部を $\mathrm{Re}(z)$ と表す．

(1)　m, k_1, k_2 が実数であることから，$w_0=(m+i)z,\ w_1=(k_1+i)z,\ w_2=(k_2+i)z$ とおくと，C_0, C_1, C_2 はそれぞれ，

$$C_0 : \mathrm{Re}(w_0)=-a$$

$$C_1 : \mathrm{Re}(w_1)=a{k_1}^2$$

$$C_2 : \mathrm{Re}(w_2)=a{k_2}^2$$

と書ける．これらは，いずれも実軸に垂直な直線を表している。w_0, w_1, w_2 はいずれも z にある複素数をかけたものとなっており，これは直線上の点 z を原点を中心に回転・拡大させたものと対応している．したがって，C_0, C_1, C_2 はいずれも直線を表している．

(2)　$\mathrm{Q}(X+Yi)$ とおくと，Q が C_1, C_2 上に存在することから

$$k_1X-Y-a{k_1}^2=0\ \cdots①$$

$$k_2X-Y-a{k_2}^2=0\ \cdots②$$

である．①−②より，$k_1-k_2=2\sqrt{m^2+1}\fallingdotseq 0$ に注意して，

$$X=\frac{a({k_1}^2-{k_2}^2)}{k_1-k_2}=a(k_1+k_2)=2am$$

これと，$Y=k_1\cdot 2am-a{k_1}^2=ak_1k_2=-a$ となることから，Q を表す複素数は，$2am-ai$ である．

また，①，②より，C_1，C_2 の方向ベクトルがそれぞれ $(1,\ k_1)$，$(1,\ k_2)$ であるので，この内積を考えると

$$1\cdot 1+k_1k_2=1-1=0$$

よって，方向ベクトル同士が直交するので，C_1 と C_2 も直交する．

(3)　$\mathrm{P}_1(X+Yi)$ とおくと，P_1 が C_0, C_1 上に存在することから，

$$mX-Y+a=0\qquad\cdots\cdots③$$

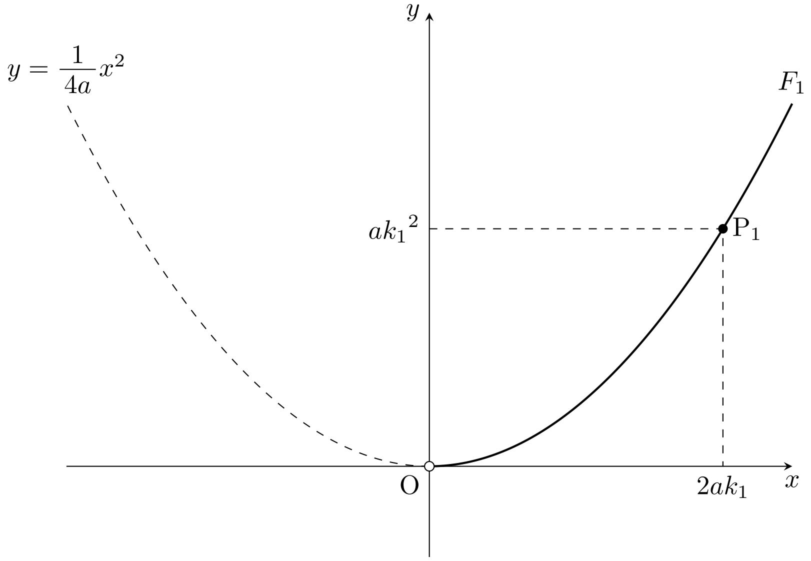
$$k_1X-Y-a{k_1}^2=0\quad\cdots\cdots④$$

となる．$m-k_1=-\sqrt{m^2+1}\fallingdotseq 0$ に注意して，③ − ④ より，

$$X=-\frac{a(1+{k_1}^2)}{m-k_1}=2a(m+\sqrt{m^2+1})=2ak_1$$

と求まり，④より，$Y=k_1X-a{k_1}^2=a{k_1}^2$ である．ここから k_1 を消去すると，$Y=\dfrac{X^2}{4a}$ を得る．

ここで，任意の実数 m について，$m < \sqrt{m^2+1}$ が成り立つことから，k_1 は 0 より大きいすべての実数をとる。したがって F_1 は，放物線 $y = \dfrac{x^2}{4a}$ の $x > 0$ の部分である．これを複素数平面上に図示すると，以下のようになる。



3

(1)　四面体 OPQR は 1 辺の長さ $\sqrt{2}$ の正四面体であるから

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3=\underset{\sim\sim}{\frac{1}{3}}$$

である．

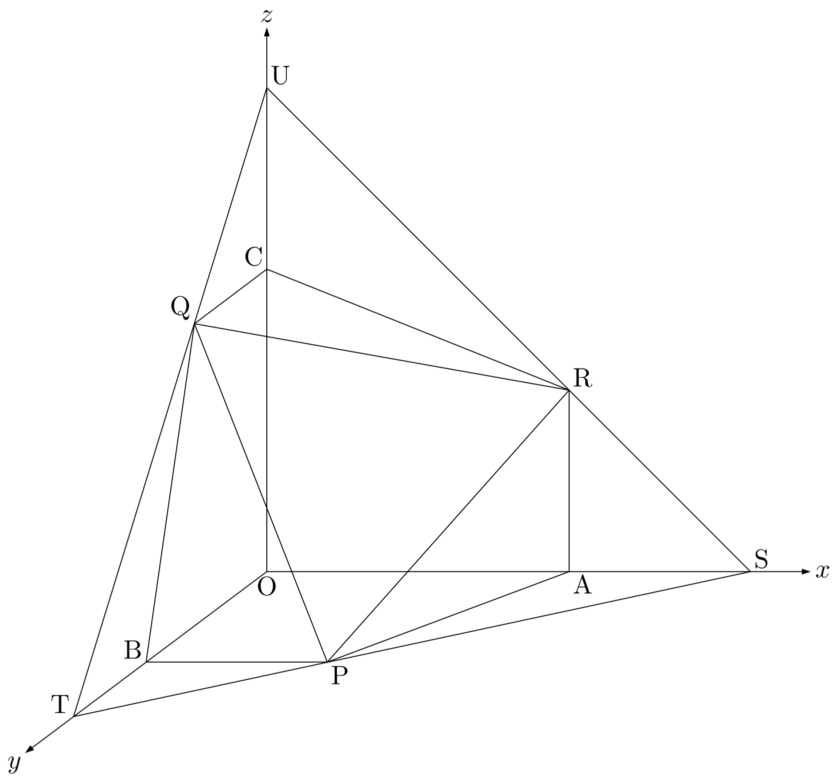
(2)　3 点 P，Q，R を通る平面と x 軸，y 軸，z 軸との交点をそれぞれ S，T，U とすると

$$\mathrm{S}(1+t,\ 0,\ 0),\ \mathrm{T}(0,\ 1+t,\ 0),\ \mathrm{U}(0,\ 0,\ 1+t)$$

である．V_1 は四面体 OSTU の体積から，3 つの四面体 SAPR，TBQP，UCRQ の体積を引いたものであるから

$$\begin{aligned}V_1&=\frac{1}{6}\mathrm{OS}\cdot\mathrm{OT}\cdot\mathrm{OU}-\frac{1}{3}\triangle\mathrm{SAP}\cdot\mathrm{AR}-\frac{1}{3}\triangle\mathrm{TBQ}\cdot\mathrm{BP}-\frac{1}{3}\triangle\mathrm{UCR}\cdot\mathrm{CQ}\\&=\frac{(t+1)^3}{6}-\frac{t^2}{6}-\frac{t^2}{6}-\frac{t^2}{6}\\&=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{t^3+3t+1}{6}}\end{aligned}$$

である．



(3)　$\mathrm{OP}^2 = t^2 + 1$ であるから

$$V_2 = \frac{4\pi}{3}\mathrm{OP}^3 = \frac{4\pi}{3}(t^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

であるから

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{t^3+3t+1}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{V_1}{V_2} &= \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{(3t^2+3)(t^2+1)^{\frac{3}{2}} - (t^3+3t+1)\cdot\frac{3}{2}\cdot 2t(t^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(t^2+1)^3} \\ &= \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{-3(t^2+t-1)}{(t^2+1)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} - t\right)\left(t + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{(t^2+1)^{\frac{5}{2}}}\end{aligned}$$

から，増減表は次の通り．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	(∞)
$\frac{d}{dt}\frac{V_1}{V_2}$		$+$	0	$-$	
$\frac{V_1}{V_2}$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

よって，求める t の値は

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

である．