

1

- 〔A〕(a) A と B₁, B₂ 間にはたらいっている垂直抗力の大きさは等しいので、その大きさを N として力のつり合いより

$$\begin{cases} \text{A の鉛直方向} & \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot 2 = mg \\ \text{B}_1(\text{B}_2) \text{ の水平方向} & T = \frac{N}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \therefore T = \frac{1}{2}mg$$

- (b) A の左右の頂点と A に接する B の頂点が重なるとき、A は B₁ と B₂ から離れるから、A の移動距離は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ell - \frac{1}{2}\ell = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\ell$$

- (c) A と B₁ と B₂ は接触しながら動くので、A が B₁ と B₂ から離れるときの速さは等しく、A が B₁ と B₂ は離れた後 B₁ と B₂ の速さは変化せず v_B であるので、このときの A と B₁ と B₂ の速さは v_B である。力学的エネルギー保存則より

$$mg \frac{\sqrt{2}-1}{2}\ell = \frac{1}{2}mv_B^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}m'v_B^2$$

$$\therefore v_B = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)m}{m+2m'}g\ell}$$

B₁ と B₂ から離れた後の A についての力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mg \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ell = \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$\therefore v_A = \sqrt{\frac{m+2(2-\sqrt{2})m'}{m+2m'}g\ell}$$

- 〔B〕(d) A' にはたらく N_2 方向の力のつり合いより

$$N_2 = mg \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right)$$

- (e) 小球まわりの力のモーメントのつり合いより

$$\ell \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) N_2 = \ell \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta_0\right) N_1$$

$$\therefore N_1 = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta_0\right)} N_2$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta_0\right) N_2 \quad \left(\because \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta_0\right)\right)$$

- (f)
- A'
- にはたらく
- N_1
- 方向の力のつり合いより,
- B_2
- が
- A'
- に及ぼす摩擦力を
- F'
- とすると

$$F' + N_1 = mg \sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta_0 \right)$$

- (d), (e)より

$$\begin{aligned} F' &= mg \sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta_0 \right) - \tan \left(\frac{\pi}{4} - \theta_0 \right) mg \cos \left(\frac{\pi}{4} + \theta_0 \right) \\ &= \frac{\sin 2\theta_0}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \theta_0 \right)} mg \\ \therefore F &= |F'| = \frac{|\sin 2\theta_0|}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \theta_0 \right)} mg \end{aligned}$$

- (g)
- $\theta_0 = \theta_{\max}$
- で
- $F = \mu N_2$
- が成立するので

$$\mu = \frac{\sin 2\theta_{\max}}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \theta_{\max} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \theta_{\max} \right)} = \frac{2 \tan 2\theta_{\max}}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \theta_{\max} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \theta_{\max} \right)}$$

- 〔C〕(h) 力学的エネルギー保存則より

$$mg \frac{\ell}{2} (\cos 2\theta - \cos 2\theta_0) = \frac{1}{2} mv^2 \quad \therefore v = \sqrt{g\ell(\cos 2\theta - \cos 2\theta_0)}$$

円運動の運動方程式より

$$m \frac{v^2}{\ell} = G - mg \cos 2\theta \quad \therefore G = \frac{mv^2}{\ell} + mg \cos 2\theta = mg(3 \cos 2\theta - 2 \cos 2\theta_0)$$

- (i) 合力
- G
- を分解して,

$$N_1 = G \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right)$$

 B_1 の水平方向の力のつり合いは

$$Mg + N_1 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) = T' \quad \therefore T' = Mg + G \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right)$$

 B_1, B_2 を一体とした水平方向の力のつり合いは

$$Mg = G \sin 2\theta + T'' \quad \therefore T'' = Mg - G \sin 2\theta$$

- (j)
- T'
- は常に正となるので,
- B_1, B_2
- の間の糸はたるまない。
- T''
- が常に正である条件は

$$\begin{aligned} T'' &= Mg - G \sin 2\theta = Mg - mg(3 \cos 2\theta - 2 \cos 2\theta_0) \sin 2\theta \\ &\geq Mg - 3mg \sin 2\theta \cos 2\theta = Mg - \frac{3}{2} mg \sin 4\theta \\ &\geq Mg - \frac{3}{2} mg \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore M_{\min} = \frac{3}{2} m$$

2

〔A〕(a) 閉回路 abcd を貫く磁束 Φ は、 $\Phi = Br\ell \sin \theta$ であるから、回路を流れる電流 I は

$$RI = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

$$\therefore I = -\frac{Br\ell\omega \cos \theta}{R}$$

$$(b) F_{ab} = |I| Br \sin |\theta|, F_{bc} = |I| B\ell, F_{cd} = |I| Br \sin |\theta|$$

(c) エネルギー保存則より、X の力学的エネルギーの減少分が抵抗で発生したジュール熱に等しいから

$$Q = mgr$$

(d) X が静止したとき、X を流れる電流は $I_0 = \frac{V}{R}$ であり、水平方向の電磁力 $F = I_0 B\ell$ と鉛直方向の重力 mg の合力が鉛直方向に対して角 θ_1 をなすから

$$mg \tan \theta_1 = F$$

$$\therefore \tan \theta_1 = \frac{VB\ell}{mgR}$$

〔B〕(e) $\theta = \theta_2$ で一瞬止まるから運動エネルギーはゼロである。よって、エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}LI_2^2 = mgr \cos \theta_2$$

$$\therefore I_2 = \sqrt{\frac{2mgr \cos \theta_2}{L}} \quad \dots\dots ①$$

(f) X に生じる誘導起電力は電流の正の向きを正として、 $-vB\ell \cos \theta$ (ただし、 $v = r \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$) となる。キルヒホッフの法則より $-L \frac{\Delta I}{\Delta t} - vB\ell \cos \theta = 0$ が成り立つから

$$-L \frac{\Delta I}{\Delta t} - r \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \cdot B\ell \cos \theta = 0$$

$$\therefore \Delta I = -\frac{Br\ell}{L} \cos \theta \cdot \Delta\theta$$

題意より、 $\Delta(\sin \theta) = \cos \theta \cdot \Delta\theta$ が成り立つから

$$\Delta I = \Delta \left(-\frac{Br\ell}{L} \times \sin \theta \right)$$

問題文にあるように、

$$C = I - \left(-\frac{Br\ell}{L} \right) \times \sin \theta$$

は時間によらない定数となる。 $\theta = \frac{\pi}{2}$ で X を放す直前, X を流れる電流はゼロであるから, X を放した直後も $I = \underbrace{0}_{(7)}$ である。よって,

$$C = 0 + \frac{Br\ell}{L} \times \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore C = \frac{Br\ell}{\underbrace{L}_{(x)}}$$

以上より

$$I = \frac{Br\ell}{L} (1 - \sin \theta) \quad \dots\dots ②$$

(g) ①, ②式で $\theta_2 = \theta = 0$, $B = B_0$ として

$$\frac{B_0 r \ell}{L} = \sqrt{\frac{2mgr}{L}}$$

$$\therefore B_0 = \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{2mgL}{r}}$$

θ_2 の概形は, 次の点に着目して定性的に考えればよい。

- ・ $B = 0$ のとき, X は重力以外の力を受けないので, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ まで運動する。
- ・ $B = B_0 (> 0)$ で $\theta_2 = 0$ となる。
- ・ ②式において左辺の電流 I は①式で決まる有限の値であるから, B を非常に大きくしたとき $1 - \sin \theta_2$ はゼロ, すなわち θ_2 は $\frac{\pi}{2}$ に近づく。

以上より, 適切なグラフは④である。

3

〔A〕(a) 変化の概略は右図。

 $p - V$ 図の面積を比較して

$$\underbrace{W_p > W_T > W_A}$$

(b) 過程 $0 \rightarrow 1$ の定圧変化において、内部エネルギーの変化量を ΔU_p とすると、吸収熱量と内部エネルギーの変化量はそれぞれ

$$\begin{cases} Q_p = C_p(T_1 - T_0) \\ \Delta U_p = C_V(T_1 - T_0) \end{cases}$$

となるので、熱力学第一法則を利用して

$$\begin{aligned} \frac{W_p}{Q_p} &= \frac{Q_p - \Delta U_p}{Q_p} \\ &= 1 - \frac{C_V(T_1 - T_0)}{C_p(T_1 - T_0)} = 1 - \underbrace{\frac{C_V}{C_p}} \end{aligned}$$

等温変化では内部エネルギーが変化しないので、 $Q_T = W_T$ であるから

$$\frac{W_T}{Q_T} = 1$$

〔B〕(c) 過程 $0 \rightarrow 3$ の断熱変化について、ポアソンの式より

$$\begin{cases} p_3(aV_0)^\gamma = p_0V_0^\gamma \\ T_3(aV_0)^{\gamma-1} = T_0V_0^{\gamma-1} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \frac{p_3}{p_0} = \frac{1}{a^\gamma} \\ \frac{T_3}{T_0} = \frac{1}{a^{\gamma-1}} \end{cases}$$

と表せる。また、過程 $4 \rightarrow 0$ の定積変化について、ボイル・シャルルの法則より

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_3V_0}{T_4} \quad \therefore \frac{T_4}{T_0} = \frac{p_3}{p_0} = \frac{1}{a^\gamma}$$

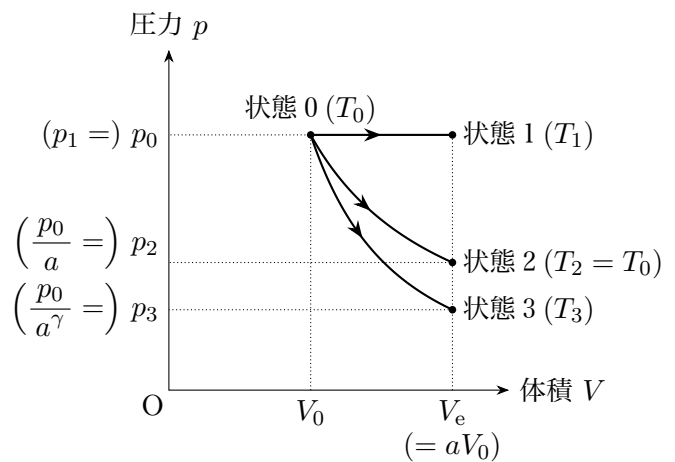
と表せる。

過程 $0 \rightarrow 3$ の断熱変化および過程 $4 \rightarrow 0$ の定積変化における、内部エネルギーの変化量をそれぞれ ΔU_A , ΔU_V とすると

$$\begin{cases} \Delta U_A = C_V(T_3 - T_0) = \left(\frac{1}{a^{\gamma-1}} - 1 \right) C_V T_0 \\ \Delta U_V = C_V(T_0 - T_4) = \left(1 - \frac{1}{a^\gamma} \right) C_V T_0 \quad (= Q) \end{cases}$$

と表せるので、熱力学第一法則を利用して

$$\frac{W_A}{Q} = \frac{0 - \Delta U_A}{\Delta U_V + 0} = \frac{-\left(\frac{1}{a^{\gamma-1}} - 1 \right) C_V T_0}{\left(1 - \frac{1}{a^\gamma} \right) C_V T_0} = \underbrace{\frac{a^\gamma - a}{a^\gamma - 1}}$$



(d) 過程 $3 \rightarrow 4$ の定圧変化について、仕事は

$$\begin{aligned} W_{3 \rightarrow 4} &= p_3(V_0 - aV_0) \\ &= -\frac{p_0}{a^\gamma} V_0(a - 1) \\ &= -\frac{a - 1}{a^\gamma} RT_0 \quad (\because \text{状態方程式 } p_0 V_0 = RT_0) \end{aligned}$$

と表せる。ただし、 R は気体定数である。マイヤーの式および比熱比の定義より、

$$R = C_p - C_V = (\gamma - 1)C_V$$

と表せることに注意して、熱効率の定義より

$$\begin{aligned} e_A &= \frac{W_A + W_{3 \rightarrow 4} + 0}{Q} \\ &= \frac{W_A}{Q} - \frac{\frac{a-1}{a^\gamma}(\gamma-1)C_V T_0}{\left(1 - \frac{1}{a^\gamma}\right)C_V T_0} \\ &= \frac{a^\gamma - a}{a^\gamma - 1} - \frac{(a-1)\gamma - (\gamma-1)}{a^\gamma - 1} \\ &= 1 - \frac{(a-1)\gamma}{a^\gamma - 1} \end{aligned}$$

〔C〕(e) 過程 $2 \rightarrow 3$ の定積変化について

$$\begin{aligned} -Q_1 &= C_V(T_3 - T_0) \\ \therefore Q_1 &= \left(1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}}\right)C_V T_0 \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}}\right) \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1}}_{\text{~~~~~}} \quad (\because \text{状態方程式 } p_0 V_0 = (\gamma - 1)C_V \cdot T_0) \end{aligned}$$

(f) $Q_T = W_T = p_0 V_0 \log_e a = (\gamma - 1)C_V T_0 \log_e a$ であることに注意して、熱効率の定義より

$$\begin{aligned} e_T &= \frac{W_T + 0 + W_{3 \rightarrow 4} + 0}{Q_T + Q} \\ &= \frac{(\gamma - 1)C_V T_0 \log_e a - \frac{a-1}{a^\gamma}(\gamma - 1)C_V T_0}{(\gamma - 1)C_V T_0 \log_e a + \left(1 - \frac{1}{a^\gamma}\right)C_V T_0} \\ &= \frac{a^\gamma \log_e a + \underbrace{(1 - a^{-\gamma})}_{(1)}}{a^\gamma \log_e a + \underbrace{\frac{a^\gamma - 1}{\gamma - 1}}_{(2)}} \end{aligned}$$

(g) 過程 $0 \rightarrow 1$ の定圧変化について、シャルルの法則より

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{aV_0}{T_1} \quad \therefore T_1 = aT_0$$

となる。(b)より

$$\begin{cases} Q_p = C_p(T_1 - T_0) = \gamma C_V(aT_0 - T_0) = \gamma(a-1)C_V T_0 \\ W_p = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) Q_p = (\gamma-1)(a-1)C_V T_0 \end{cases}$$

と表せるので、熱効率の定義より

$$\begin{aligned} e_p &= \frac{W_p + 0 + W_{3 \rightarrow 4} + 0}{Q_p + Q} \\ &= \frac{(\gamma-1)(a-1)C_V T_0 - \frac{a-1}{a^\gamma}(\gamma-1)C_V T_0}{\gamma(a-1)C_V T_0 + \left(1 - \frac{1}{a^\gamma}\right)C_V T_0} \\ &= \frac{(\gamma-1)(a-1)a^\gamma - (a-1)(\gamma-1) \cdot 1}{\gamma a^\gamma(a-1) + (a^\gamma - 1)} \\ &= \frac{(\gamma-1)(a-1)(a^\gamma - 1)}{\gamma a^\gamma(a-1) + a^\gamma - 1} \end{aligned}$$

(h) (d), (f), (g)の結果に与えられた近似値を用いると

$$\begin{cases} e_A \doteq 1 - \frac{(10-1)\frac{5}{3}}{46-1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \doteq 0.666 \\ e_T \doteq \frac{46 \cdot 2.3 + 1 - 10}{46 \cdot 2.3 + \frac{5}{3} - 1} = \frac{96.8}{173.3} \doteq 0.558 \\ e_p \doteq \frac{\left(\frac{5}{3} - 1\right) \cdot 9 \cdot (46-1)}{\frac{5}{3} \cdot 46 \cdot (10-1) + 46-1} = \frac{18}{49} \doteq 0.367 \end{cases}$$

$$\therefore \underline{e_A > e_T > e_p}$$