2021 年度　東京工業大学　数学　解答例

1

(1)　10^{k-1}以上かつ 10^{k}未満 であって，条件 $(*)$ を満たす正の整数は

10^{k-1}の位の数は1〜8 の 8 通り
それ以外の位の数は0〜8 の 9 通りずつ

存在するため，その総数は $8 \times 9^{k-1}$(個) である。したがって，$a_k = \underset{\sim\sim\sim}{8 \cdot 9^{k-1}}$ である。

(2)　まず，正の整数 j に対して，数列 $\{b_n\}$ の第 10^{j-1} 項から第 $10^{j}-1$ 項までの和 S_j について考える。$10^{j-1} \leqq n \leqq 10^{j}-1$ のとき，$\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{10^{j-1}}$ であるから

$$b_n = \frac{1}{n} \leqq \frac{1}{10^{j-1}} \qquad (n \text{ が } 10^{j-1} \leqq n \leqq 10^{j}-1 \text{ かつ条件 } (*) \text{ を満たす})$$
$$b_n = 0 \qquad (n \text{ が } 10^{j-1} \leqq n \leqq 10^{j}-1 \text{ を満たし，条件 } (*) \text{ は満たさない})$$

である。したがって

$$S_j = \sum_{n=10^{j-1}}^{10^{j}-1} b_n \leqq \frac{1}{10^{j-1}} \cdot a_j \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k)$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{10^{k}-1} b_n &= \sum_{j=1}^{k} S_j \\
&\leqq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{10^{j-1}} \cdot a_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{j-1} \\
&= 8 \cdot \frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{k}}{1-\frac{9}{10}} \\
&= 80 \cdot \left\{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{k}\right\} \\
&< 80
\end{aligned}$$

となるので，示された。(証明終わり)

2

(1)　E と ℓ の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{4}+(ax+b)^2=1$$

$$\left(\frac{1}{4}+a^2\right)x^2+2abx+b^2-1=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

となるので，直線 ℓ と楕円 E が異なる 2 点を共有する条件は

①が異なる 2 つの実数解をもつこと

である。①の x^2 の係数は 0 ではないので，その条件は，判別式 $D>0$ より

$$D=(2ab)^2-4\left(\frac{1}{4}+a^2\right)(b^2-1)>0$$

$$\underline{4a^2-b^2+1>0}$$

となる。

(2)　P，Q，S，R の x 座標を順に p，q，s，r とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(q-p,\ (aq+b)-(ap+b))=(q-p)(1,\ a)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=(r-s)(1,\ a)$$

より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ となる条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{SR}}=\{(q-p)-(r-s)\}(1,\ a)=\vec{0}$$

となることであるから，$(q-p)-(r-s)=0$，つまり，$q-p=r-s$ である。

さて，①の実数解が p，q であるから，

$$p=\frac{-2ab-\sqrt{D}}{2\left(\frac{1}{4}+a^2\right)},\qquad q=\frac{-2ab+\sqrt{D}}{2\left(\frac{1}{4}+a^2\right)} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

となる。よって

$$q-p=\frac{\sqrt{D}}{\frac{1}{4}+a^2}=\frac{\sqrt{4a^2-b^2+1}}{\frac{1}{4}+a^2}$$

であり，同様にして

$$r-s=\frac{\sqrt{4a^2-c^2+1}}{\frac{1}{4}+a^2}$$

であるから，$q-p=r-s$ へ代入して

$$\frac{\sqrt{4a^2-b^2+1}}{\frac{1}{4}+a^2}=\frac{\sqrt{4a^2-c^2+1}}{\frac{1}{4}+a^2}$$

$$b^2=c^2$$

$$(b+c)(b-c)=0$$

となるが，$b>c$ より，$b-c \fallingdotseq 0$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ となる条件は，(1) とあわせて

$$\underline{4a^2-b^2+1>0,\ b>0,\ b+c=0}$$

である。

(3)　楕円 E 上の 4 点の組で，それらを 4 頂点とする四角形が正方形であるとき，その四角形の 2 組の対辺は互いに平行であり，少なくとも 1 組は，y 軸に平行ではない。そこで，その 1 組の対辺を延長してできる直線のうち，y 切片が大きい方を $\ell : y=ax+b$，他方を $m : y=ax+c$ と置くことができて，4 頂点を (2) の決め方と同様に，P，Q，S，R とする。

四角形 PQRS が正方形となるためには，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ が必要であり，このとき，(2) より，$b=-c$ であるから，ℓ と m は原点 O に関して対称である。E もやはり O に関して対称であるから，P と R，Q と S はそれぞれ O に関して対称である。したがって，正方形 PQRS の対角線の交点は O である。

さらに，四角形 PQRS が正方形となるためには，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}$ かつ $\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ が必要である。

以上より，正方形 PQRS の 4 頂点は，0 以上の実数 u，v を用いて

$$(u,\ v),\ (v,\ -u),\ (-v,\ u),\ (-u,\ -v)$$

とおける。これらが楕円 E 上にある条件は

$$\begin{cases}\dfrac{u^2}{4}+v^2=1\\[2mm]\dfrac{v^2}{4}+u^2=1\end{cases}$$

であり，$u \geqq 0$，$v \geqq 0$ に注意して解くと

$$u=v=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

である。よって，求める 4 点の組は

$$\underline{\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$$

である。

$\boxed{3}$

(1)　正の整数 n に対して

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n = n\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!\,n!} = (n+1)\cdot\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} = (n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

である。また，${}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$ は整数であることに注意すると，$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n = (n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$ より，$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数である。さらに，n と $n+1$ は互いに素であるから，${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数である。(証明終わり)

(2)　$n \geqq 4$ である正の整数 n に対して

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} \\
&= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+3)(n+2)}{n!} \\
&= \frac{2\{(2n-1)(2n-2)\cdots(n+3)\}\times(n+2)}{(n-1)!} \\
&> \frac{2\{(n-1)(n-2)\cdots3\}\times(n+2)}{(n-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!\cdot(n+2)}{(n-1)!} \\
&= n+2
\end{aligned}$$

である。(証明終わり)

別解

まず，$a_4 = \dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{5} = 14 > 4+2$ であるから，$n=4$ のとき，$a_n > n+2$ である。
次に，4 以上のある自然数 n に対して，$a_n > n+2$ であるとき

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{{}_{2(n+1)}\mathrm{C}_{n+1}}{n+2} \\
&= \frac{1}{n+2}\cdot\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} \\
&= \frac{2(2n+1)}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!} \\
&= \frac{2(2n+1)}{n+2}\cdot\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} \\
&= \frac{2(2n+1)}{n+2}a_n \\
&> 2(2n+1) \\
&= 3n+(n+2) \\
&> n+3
\end{aligned}$$

となるので，$a_{n+1} > (n+1)+2$ が成り立つ。

以上より，数学的帰納法から $n \geqq 4$ であるすべての正の整数に対して，$a_n > n+2$ である。(証明終わり)

(3)　(1) より，すべての正の整数 n に対して，a_n は整数である。また

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{{}_{2(n+1)}\mathrm{C}_{n+1}}{n+2} \\ &= \frac{1}{n+2}\cdot\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} \\ &= \frac{2(2n+1)}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+2}\cdot\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} \\ &= \frac{4n+2}{n+2}a_n \end{aligned}$$

であるから

$$a_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}a_n \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ。

ここで，$n \geqq 4$ である正の整数 n に対して，a_{n+1} が素数であるとすると，①より

$$a_{n+1}(n+2) = (4n+2)\times a_n$$

であるから，$4n+2$，a_n のいずれかが素因数 a_{n+1} をもつこととなる。ところが，$n \geqq 4$ のとき，(2) より

$$a_{n+1} > \frac{4n+2}{n+2}\cdot(n+2) = 4n+2$$

となるので，$4n+2$ が素因数 a_{n+1} をもつことはない。また，$4n+2 > n+2$ であるから，①より

$$a_{n+1} > a_n$$

となるので，a_n が素因数 a_{n+1} をもつこともない。

したがって，$n \geqq 4$ のとき，a_{n+1} が素数となることはない。

以上より，a_n が素数となる正の整数 n の候補は $n=1$，2，3，4 に絞られ

$$a_1 = 1,\qquad a_2 = 2,\qquad a_3 = 5,\qquad a_4 = 2\cdot 7$$

であるから，a_n が素数となる正の整数 n は，$n = 2，3$ に限られる。

4

(1)　$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1$ に注意すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2 \\ &= \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{a}\right|^2 \\ &= 2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

が成り立つ。同様に，$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = \left|\vec{d}\right| = 1$ に注意して

$$\mathrm{BC}^2 = 2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c},\ \mathrm{CA}^2 = 2 - 2\vec{c}\cdot\vec{a}$$
$$\mathrm{AD}^2 = 2 - 2\vec{a}\cdot\vec{d},\ \mathrm{BD}^2 = 2 - 2\vec{b}\cdot\vec{d},\ \mathrm{CD}^2 = 2 - 2\vec{c}\cdot\vec{d}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}F &= 2(6 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{c} - 2\vec{c}\cdot\vec{a}) - 3(6 - 2\vec{a}\cdot\vec{d} - 2\vec{b}\cdot\vec{d} - 2\vec{c}\cdot\vec{d}) \\ &= -6 - 4(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}) + 6(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot\vec{d}\end{aligned}$$

となる。また，$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = 1$ より

$$\begin{aligned}&(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{d}) \\ =&\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}) - 3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot\vec{d} \\ =&3 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}) - 3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot\vec{d}\end{aligned}$$

であるから，$k = \underset{\sim\sim}{-2}$ のとき

$$F = k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{d})$$

と書ける。(証明終わり)

(2)　$3\vec{g} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ とおく。(1) より

$$\begin{aligned}F &= -2(3\vec{g})\cdot(3\vec{g} - 3\vec{d}) \\ &= -18\left|\vec{g} - \frac{1}{2}\vec{d}\right|^2 + \frac{9}{2}\left|\vec{d}\right|^2 \\ &= -18\left|\vec{g} - \frac{1}{2}\vec{d}\right|^2 + \frac{9}{2}\end{aligned}$$

である。したがって，$\vec{g} = \dfrac{1}{2}\vec{d}$ が実現できるならば，このとき F は最大となる。

　線分 OD の垂直二等分面と球面 S の交わりとして現れる円周上に，3 点 A，B， C が正三角形の頂点をなすように A，B，C をとると，三角形 ABC の重心 G は外心と一致し，その外心は線分 OD の中点であるから

$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2}\vec{d}$$

となる。

以上より，F の最大値 M は $M = \underset{\sim\sim}{\frac{9}{2}}$ である。

(3)　(2) より，$F = M$ となる条件は

$$\vec{g} = \frac{1}{2}\vec{d} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である。①より

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} &= \frac{1}{2}\vec{d}\\
\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} &= \frac{3}{4}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c}\\
\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} &= \left(\frac{7}{8},\ -\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right)
\end{aligned}$$

となる。よって，2 点 A，B の中点を M とおくと

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|^2 = \left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^2 + 0^2 = 1$$

であるから，M も球面 S 上にある。ここで，2 点 A，B が異なるとすると，$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{OM}^2 + \mathrm{MA}^2 > 1$ となって矛盾。したがって，2 点 A，B は M に一致する。よって，求める A，B の組は

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\mathrm{A}\left(\frac{7}{8},\ -\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{7}{8},\ -\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right)}$$

に限られる。

$\boxed{5}$

(1)　円 C 上のすべての点は $\left(\pm\sqrt{a^2-(t-a)^2},\ t\right)$ $(0 \leqq t \leqq 2a)$ と表せるので，円 C が $y \geqq x^2$ で表される領域 D_1 に含まれる条件は

$0 \leqq t \leqq 2a$ を満たすすべての実数 t において

$$t \geqq a^2-(t-a)^2 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ

ことである。

①は $t=0$ では a の値によらず成立するので，$0<t \leqq 2a$ のもとで考える。

$$t \geqq a^2-(t-a)^2$$
$$t \geqq 2at-t^2$$
$$t \geqq 2a-1 \qquad (t>0\text{ より})$$

であるから，$0<t \leqq 2a$ を満たすすべての実数 t において，①が成り立つ条件は

$$2a-1 \leqq 0$$

である。よって，求める a の範囲は $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{0<a \leqq \frac{1}{2}}$ である。

(2)　(1) と同様に，円 C が $y \geqq x^2-x^4$ で表される領域 D_2 に含まれる条件は

$0 \leqq t \leqq 2a$ を満たすすべての実数 t において

$$t \geqq a^2-(t-a)^2-\left\{a^2-(t-a)^2\right\}^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ

ことである。

②は $t=0$ では a の値によらず成立するので，$0<t \leqq 2a$ のもとで考える。

$$t \geqq a^2-(t-a)^2-\left\{a^2-(t-a)^2\right\}^2$$
$$t \geqq 2at-t^2-(2at-t^2)^2$$
$$1 \geqq 2a-t-t(2a-t)^2 \qquad \cdots\cdots\cdots ③ \quad (t \fallingdotseq 0\text{ より})$$

であるが，③が，$0<t \leqq 2a$ を満たすすべての実数 t について成り立つためには，$t \to +0$ の場合においても成立すること，つまり

$$1 \geqq \lim_{t\to+0}\left\{2a-t-t(2a-t)^2\right\}=2a$$

が必要である。よって，$0<a \leqq \frac{1}{2}$ が必要である。

ところで，$x^2 \geqq x^2-x^4$ であるから，D_1 は D_2 に含まれるので，(1) より，$0<a \leqq \frac{1}{2}$ であるとき，C は D_2 に含まれる。

以上より，求める a の範囲は $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{0<a \leqq \frac{1}{2}}$ である。

(3)　$f(x) = x^2 - x^4$ とする。$f(x) = f(-x)$ より，$y = f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である。

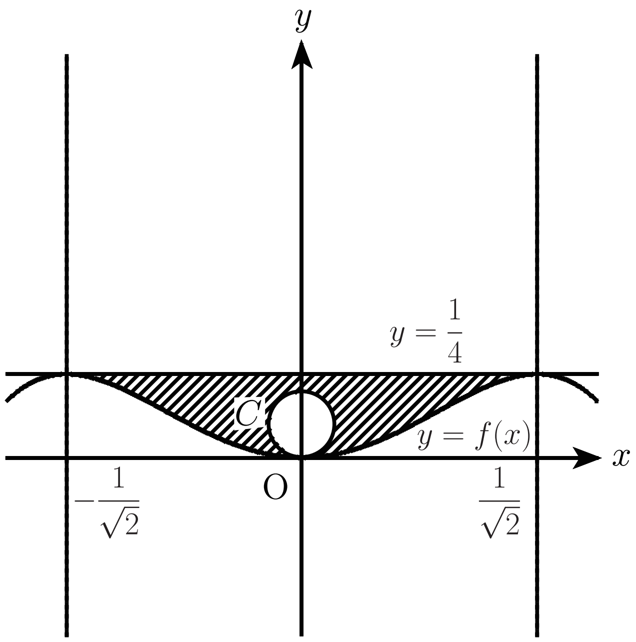
$$f'(x) = 2x - 4x^3 = 2x(1 - 2x^2)$$

であるから，$x \geqq 0$ の範囲で，次の増減表を得る。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

a の値によって場合分けを行う。

- $0 < a \leqq \dfrac{1}{8}$ のとき

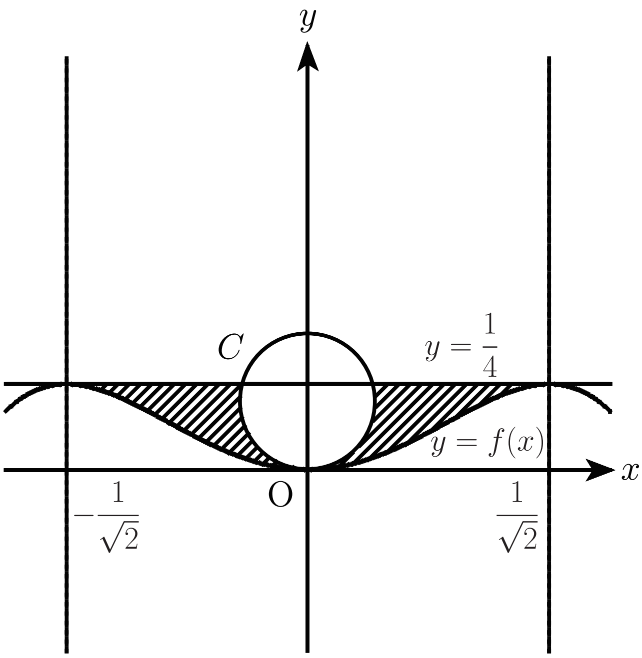


領域 D は上図の斜線部である (境界含む)。よって，求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{1}{4}} \pi x^2 dy - (\text{半径 } a \text{ の球の体積}) \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi x^2 f'(x) dx - \frac{4}{3}\pi a^3 \\
&= \pi \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^6 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{4}{3}\pi a^3 \\
&= \frac{1}{24}\pi - \frac{4}{3}\pi a^3
\end{aligned}$$

である。

- $\dfrac{1}{8} < a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき



領域 D は上図の斜線部である (境界含む)。よって，求める体積 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{1}{4}} \pi x^2 dy - \int_0^{\frac{1}{4}} \pi \left\{a^2 - (y-a)^2\right\} dy \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi x^2 f'(x) dx - \int_0^{\frac{1}{4}} \pi \left(2ay - y^2\right) dy \\
&= \frac{1}{24}\pi - \pi \left[ay^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{24}\pi - \frac{1}{16}\pi a + \frac{1}{192}\pi \\
&= \frac{3}{64}\pi - \frac{1}{16}\pi a
\end{aligned}
$$

である。

以上より，$V = \begin{cases} \dfrac{1}{24}\pi - \dfrac{4}{3}\pi a^3 & \left(0 < a \leqq \dfrac{1}{8} \text{のとき}\right) \\ \dfrac{3}{64}\pi - \dfrac{1}{16}\pi a & \left(\dfrac{1}{8} < a \leqq \dfrac{1}{2} \text{のとき}\right) \end{cases}$ である。