2020　一橋大学　数学　解答例

$\boxed{1}$

(1)　10^n を 2020 で割った余りを a_n とおく。$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}10^{n+4}-10^n &= 10^{n-2}\cdot 10^2(10^4-1)\\ &= 10^{n-2}\cdot 10^2(10^2+1)(10^2-1)\\ &= 10^{n-2}\cdot 10^2\cdot 101\cdot 99\\ &= 10^{n-2}\cdot 2020\cdot 5\cdot 99\end{aligned}$$

より

$$a_{n+4}=a_n \quad (n \geqq 2)$$

となる。

$$10^4 = 2020\cdot 4+1920$$

$$10^5 = 2020\cdot 49+1020$$

であるから

$$a_0=1,\ a_1=10,\ a_2=100,\ a_3=1000,\ a_4=1920,\ a_5=1020$$

となる。上の漸化式を用いて

$$a_{10}=a_6=a_2=\underline{100}$$

となる。

(2)　100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 であるものは

$$N=10^{99}+10^l \quad (l \text{ は } 0 \text{ 以上 } 99 \text{ 以下の整数})$$

とおける。N を 2020 で割った余りは

$$a_{99}+a_l$$

を 2020 で割った余りに一致する。

$$a_{99}=a_{95}=\cdots=a_3=1000$$

であり，(1) より，a_l は 1，10，100，1000，1920，1020 のいずれかの値であるから，

$$a_{99}+a_l$$

が 2020 で割りきれる条件は $a_l=1020$ である。さらに，(1) より $a_l=1020$ となる条件は

$$l=5,\ 9,\ 13,\ \cdots,\ 97$$

であるから，条件を満たす N は<u>24 個</u>である。

$\boxed{2}$

$$\tan 2\theta + a\tan\theta = 0 \qquad \cdots(*)$$

を満たす θ は，$\tan 2\theta$，$\tan\theta$ の定義域から

$$\theta \neq \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$$

である。

(i) $a = 0$ のとき

$(*)$ は

$$\tan 2\theta = 0$$
$$\theta = 0$$

となり，$(*)$ を満たす θ の個数は 1 個である。

(ii) $a \neq 0$ のとき

$\tan\theta = t$ とおくと，t は，± 1 以外のすべての実数をとる。2 倍角の公式より，$(*)$ は

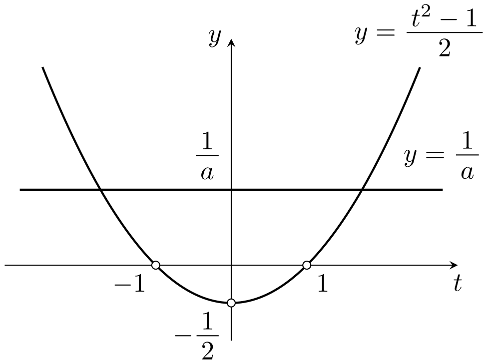
$$\frac{2t}{1-t^2} + at = 0$$
$$t\left(\frac{2}{1-t^2} + a\right) = 0 \qquad \cdots(**)$$

となり，この方程式の解 t の個数は $t = 0$ の「1 個」と，「$t \neq 0$，± 1 かつ $\dfrac{2}{1-t^2} + a = 0$ の解の個数」の和となる。$t \neq 0$，± 1 の下で

$$\frac{2}{1-t^2} + a = 0$$
$$\frac{1}{a} = \frac{t^2-1}{2}$$

であるから，$t \neq 0$，± 1 かつ $\dfrac{2}{1-t^2} + a = 0$ の解の個数は次図で，$y = \dfrac{t^2-1}{2}$ $(t \neq 0,\ \pm 1)$ と $y = \dfrac{1}{a}$ の共有点の個数を考えることにより

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} \leqq -\dfrac{1}{2} \text{のとき} & 0 \text{ 個} \\ -\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{a} < 0,\ \dfrac{1}{a} > 0 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \end{cases}$$



　よって，$(**)$ の解 t の個数は

$$\begin{cases} -2 \leqq a < 0 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a < -2,\ a > 0 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$

となり，t の個数と θ の個数は 1 対 1 に対応するので，$(*)$ を満たす θ の個数はこれに一致する。

(i)(ii) より，$(*)$ を満たす θ の個数は

$$\underline{\begin{cases} -2 \leqq a \leqq 0 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a < -2,\ a > 0 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}}$$

となる。

$\boxed{\text{注意}}$　$a = 0$ のとき，$(*)$ を

$$\tan 2\theta = 0 \quad (0 \leqq \theta < \pi)$$

と解釈すると，解は $\theta = 0, \dfrac{\pi}{2}$ の 2 個となる。

$\boxed{3}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\angle BAC$$

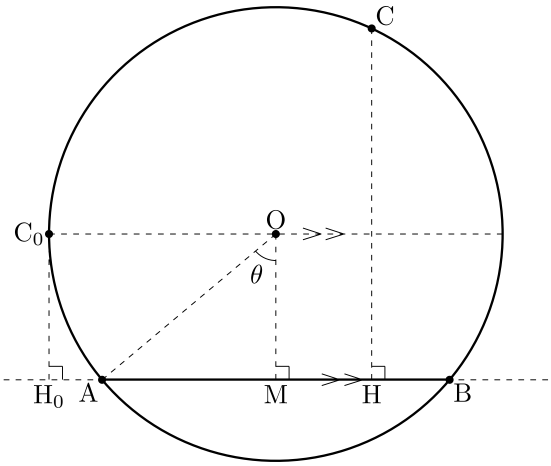
である。

最大値については，A，B，C は半径 1 の円周上にあるので，$\left|\overrightarrow{AB}\right|\leqq 2$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|\leqq 2$，$\cos\angle BAC\leqq 1$ であるから

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\leqq 2\cdot 2\cdot 1$$

となる。等号は，B と C が一致し，かつ AB が円の直径となるときに成立する。よって，最大値は $\underset{\sim}{4}$ となる。

次に最小値について考える。円の中心を O とし，まずは，A，B を固定し，$\angle AOB=2\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，辺 AB の中点を M とする。$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ が最小になるのは，$\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\angle BAC$ が最小になるときであり，それは，C から直線 AB へ下ろした垂線と直線 AB の交点を H とすると，H が A に関して B と反対側にあり，かつ，AH の長さが最大となるときである。これは，C が，辺 AB に平行な直径の両端のうち，A に近い方の点 C_0 に一致するときであり，このときの H を H_0 とする。



$$AB=2AM=2\sin\theta,\ AH_0=1-AM=1-\sin\theta$$

であるから，A，B を固定したときの $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の最小値は

$$-AB\cdot AH_0=-2(1-\sin\theta)\sin\theta$$

となる。次に，A，B を動かして (つまり θ を動かすと)

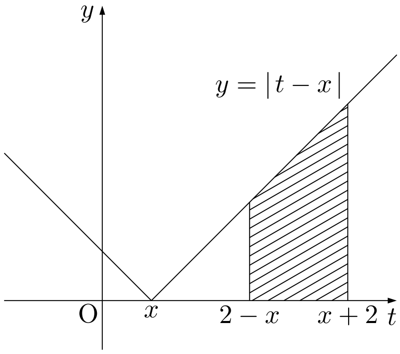
$$-2(1-\sin\theta)\sin\theta=2\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

より，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $-\dfrac{1}{2}$ となる。よって，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の最小値は $\underset{\sim}{-\dfrac{1}{2}}$ となる。

$\boxed{4}$

$t-x$ は $t=x$ を境に符号が変化するので，x が積分区間 $2-x \leqq t \leqq 2+x$ に含まれるか否かで場合分けする。$x < x+2$ であるから，次の 2 つの場合がある。

(i)　$0 < x \leqq 2-x$　つまり　$0 < x \leqq 1$ のとき

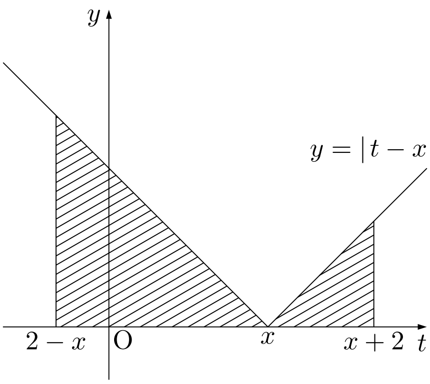


$\displaystyle\int_{2-x}^{2+x} |t-x|\,dt$ は図の斜線部の面積を表すので

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\left[\{(2-x)-x\}+\{(x+2)-x\}\right]\cdot\{(x+2)-(2-x)\} \\ &= -2x+4 \end{aligned}$$

となる。これは単調減少な関数であるから，$x=1$ で最小値 $F(1)$ をとる。

(ii)　$2-x \leqq x$　つまり　$1 \leqq x$ のとき



$\displaystyle\int_{2-x}^{2+x} |t-x|\,dt$ は図の斜線部の面積を表すので

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}\{x-(2-x)\}^2 + \frac{1}{2}\{(x+2)-x\}^2\right] \\ &= 2x + \frac{4}{x} - 4 \end{aligned}$$

となる。相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\begin{aligned} F(x) &\geqq 2\sqrt{2x \cdot \frac{4}{x}} - 4 \\ &= 4\left(\sqrt{2}-1\right) \end{aligned}$$

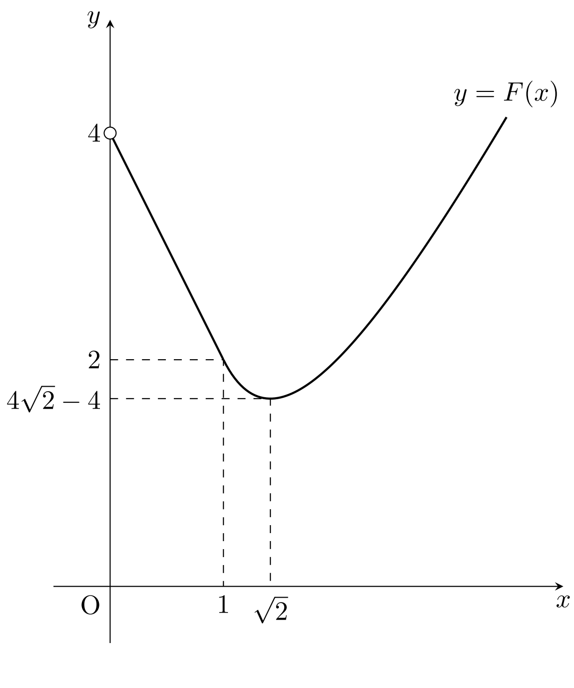
となる。等号成立条件は $2x = \dfrac{4}{x}$ すなわち $x = \sqrt{2}$ 　(これは $x \geqq 1$ を満たす) である。よって，最小値は

$$4\left(\sqrt{2}-1\right)$$

であり，これは $x \geqq 1$ の範囲での最小値であるから (i) で求めた $F(1)$ よりも小さい。

(i)(ii) より $F(x)$ の最小値は $\underline{4\left(\sqrt{2}-1\right)}$ である。

$\boxed{\text{参考図}}$ 厳密には数学 III の知識を用いることになるが，$y = F(x)$ のグラフは次図のようになる。



$\boxed{5}$

(1)

- p_1 について
  点の合計がちょうど 1 になるのは，表が 1 回出るときであるから
  $$p_1 = \frac{1}{2}$$
- p_2 について
  点の合計がちょうど 2 になるのは，次の 2 つの場合である。
  (i)　表が 2 回出るとき
  (ii)　裏が 1 回出るとき
  よって，求める確率は
  $$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$
- p_3，p_4 について
  $n \geqq 1$ のとき，点の合計がちょうど $n+2$ になるのは，次の 2 つの場合である。
  (i)　点の合計がちょうど $n+1$ のときに，次の試行で表が出るとき
  (ii)　点の合計がちょうど n のときに，次の試行で裏が出るとき
  よって，点の合計がちょうど $n+2$ となる確率は
  $$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n \quad (n \geqq 1)$$
  となる。これを用いて
  $$p_3 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{5}{8}$$
  $$p_4 = \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{11}{16}$$
  となる。

(2)　(1) で得られた漸化式より

$$p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(p_{n+1} - p_n\right)$$

であるから，p_2，p_1 の値を用いて

$$p_{n+1} - p_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(p_2 - p_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

となる。これを用いて

$$|p_{n+1} - p_n| < 0.01$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 0.01$$

となる。$\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$ は単調に減少する数列であり

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64},\ \left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{128}$$

であるから，$|p_{n+1}-p_n|<0.01$ を満たす最小の n は $n=\underset{\sim}{6}$ である。