2020年度　早稲田大学　教育学部　数学　解答例

$\boxed{1}$

(1) $\dfrac{n+2}{2(n+1)}$

(2) $C\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5},\ -2\right)$

(3) $\dfrac{2\pi(3-e)}{3}$

(4) $f(x)=\dfrac{2}{x}$

$\boxed{2}$

(1) 半径1の円の中心をO

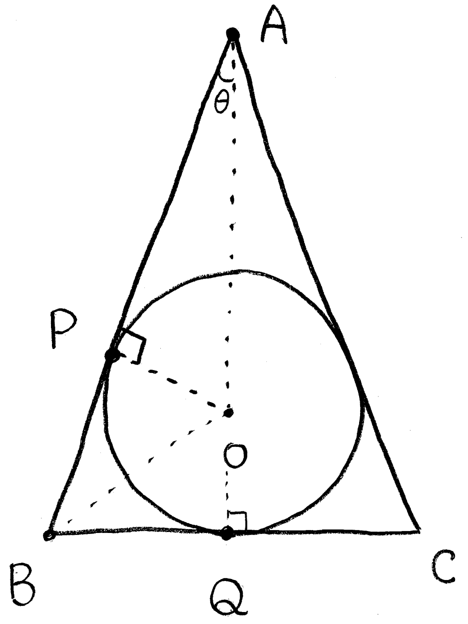
とし，辺AB，BCとの

接点をそれぞれP，Q

とすると，Oは△ABC

の内心であるから

$$\angle PAO = \frac{1}{2}\angle BAC = \theta$$



となり

$$AO = \frac{OP}{\sin \angle PAO} = \frac{1}{\sin\theta}$$

を得る。△ABCはAB = ACの二等辺三角形であるから

$$\triangle APO \sim \triangle AQC$$

となり

$$AC = \frac{AQ}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} \times \left(\frac{1}{\sin\theta} + 1\right)$$

$$= \underline{\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$$

となる。

(2)　(1)の答えを $f(\theta)$ とおいて

$$f'(\theta) = \frac{\sin\theta\cos^2\theta - (1+\sin\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{\sin^3\theta + 2\sin^2\theta - 1}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$$

となる。$f'(\theta)$ の符号は分子のものと一致し

$$(\text{分子}) = (\sin\theta + 1)\left(\sin\theta - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\sin\theta + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

となるから，θ のとり得る値は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であることと $\sin\theta$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ は単調増加であることに注意すると

$$\sin\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

となる θ (これを θ_0 と置く)で(分子)は負から正へ符号変化する。よって，このとき $f(\theta)$ すなわち AC は最小となるので

$$\sin\theta = \sin\theta_0$$

$$= \underline{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

となる。

$\boxed{3}$

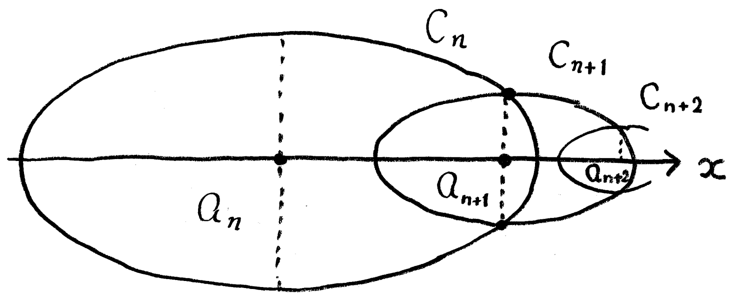
(1) C_n と C_0 の相似比は

$\left(\frac{1}{2}\right)^n : 1$

なので，C_n の長半径は

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2$，短半径は

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ となる。C_n の中心は x 軸上にあることに注意すると，C_n の方程式は



$$C_n : \frac{(x-a_n)^2}{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2\right\}^2} + \frac{y^2}{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^2} = 1$$

となる。C_{n+1} の短軸は 2点 $\left(a_{n+1}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$，$\left(a_{n+1}, -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ を端点とする線分なので，これらは C_n 上にあることから

$$\frac{(a_{n+1}-a_n)^2}{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2\right\}^2} + \frac{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^2}{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^2} = 1$$

$$(a_{n+1}-a_n)^2 = \frac{3}{4} \times \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2\right\}^2$$

となるが，$a_{n+1} > a_n$ より

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となる。$a_0 = 0$ を用いて，$n \geqq 1$ のとき

$$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

となる。これは $n=0$ でも成立するので

$$a_n = \underline{2\sqrt{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$$

である。

(2) 一般に領域 A の面積を $S(A)$ と表すこととすると、

$(D_0 \cup D_1 \cup \cdots \cup D_k) \cap (\overline{D_k} \cap D_{k+1}) = \phi$ $(k=0, 1, 2, \cdots, n-1)$ に注意し

$$S_n = S(D_0) + S(\overline{D_0} \cap D_1) + S(\overline{D_1} \cap D_2) + \cdots + S(\overline{D_{n-1}} \cap D_n)$$

となる。$S(D_0)$ は長半径 2，短半径 1 の楕円の面積なので

$$S(D_0) = \pi \times 2 \times 1 = 2\pi$$

であり，

$$\begin{aligned} S(\overline{D_0} \cap D_1) &= S(D_1) \times \frac{1}{2} - \int_{a_1}^{2} 2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\, dx \\ &= \pi \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta \cdot 2\cos\theta\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} - \Big[2\theta + \sin 2\theta \Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

（積分計算では $x = 2\sin\theta$ とし

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta \qquad \begin{array}{c|c} x & a_1 \to 2 \\ \hline \theta & \frac{\pi}{3} \to \frac{\pi}{2} \end{array}$$

であることを用いて置換積分をした。）

となる。

$\overline{D_{k-1}} \cap D_k$ は $\overline{D_0} \cap D_1$ と相似であり，

その相似比は $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} : 1$ であるから

$$S\left(\overline{D_{k-1}} \cap D_k\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}^2 \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} S_n &= 2\pi + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \\ &= 2\pi + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} S_n &= 2\pi + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \times \frac{4}{3} \\ &= \frac{17}{9}\pi + \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

である。

$\boxed{4}$

(1) C_k 上の点 $\left(x, \dfrac{k}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ と原点との距離 $r(x)$ は

$$r(x) = \sqrt{x^2 + \frac{k^2}{1+x^2}} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

となる。$x^2 = t$ として根号内を $f(t)$ とおくと

$$f'(t) = 1 + \frac{-k^2}{(1+t)^2}$$
$$= \frac{(1+k+t)(1-k+t)}{(1+t)^2}$$

である。tの定義域は $0 \leqq t \leqq 1$ である。$r(x)$ の最小値を $m(k)$ とおく。

- $0 < k \leqq 1$ のとき

$f'(t) \geqq 0$ であるから，$f(t)$は単調に増加する。

よって $M(k) = \sqrt{f(1)} = \sqrt{1+\frac{1}{2}k^2}$

$m(k) = \sqrt{f(0)} = k$

である。

- $1 < k < 2$ のとき

t	0	$\cdots$	$k-1$	$\cdots$	1
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

$M(k)$ は $\sqrt{f(0)}$ と $\sqrt{f(1)}$ の小さくない方,

$m(k) = \sqrt{f(k-1)} = \sqrt{2k-1}$

である。

- $k \geqq 2$ のとき

$f'(t) \leqq 0$ であるから，$f(t)$ は単調に減少するので

$M(k) = \sqrt{f(0)} = k$

$m(k) = \sqrt{f(1)} = \sqrt{1+\frac{1}{2}k^2}$ である。

ここで，$f(1)$ と $f(0)$ の大小について

$$f(0)-f(1)=k^2-\left(\frac{k^2}{2}+1\right)$$
$$=\frac{1}{2}(k-\sqrt{2})(k+\sqrt{2})$$

より，$k>\sqrt{2}$ のとき $f(0)>f(1)$

$k\leqq\sqrt{2}$ のとき $f(1)\geqq f(0)$

であるから，以上をまとめて

$$M(k)=\begin{cases}\sqrt{1+\frac{1}{2}k^2} & (0<k\leqq\sqrt{2})\\ k & (k>\sqrt{2})\end{cases}$$

である。

(2) (1) より

$$m(k)=\begin{cases}k & (0<k\leqq 1)\\ \sqrt{2k-1} & (1<k\leqq 2)\\ \sqrt{1+\frac{1}{2}k^2} & (k>2)\end{cases}$$

である。

$$S(k)=\pi\left[\{M(k)\}^2-\{m(k)\}^2\right]$$

であるから

$$S(k)=\begin{cases}\dfrac{\pi(2-k^2)}{2} & (0<k\leqq 1)\\ \dfrac{\pi(2-k)^2}{2} & (1<k\leqq\sqrt{2})\\ \pi(k-1)^2 & (\sqrt{2}<k\leqq 2)\\ \dfrac{\pi(k^2-2)}{2} & (k>2)\end{cases}$$