2020 年度　早稲田大学　政治経済学部　数学　解答例

問 1

（**1**）　24

（**2**）　$\dfrac{1}{6}$

（**3**）　$y = x^2 + 1$

問 2

（**1**） $\dfrac{2}{3}$

（**2**） $\triangle$PAB の面積：$2t$，　$\triangle$PBC の面積：$1-3t$

（**3**） 2

問 3

（**1**）　あ：$3t^2-4xt+2x^2$，　い：$\dfrac{2}{3}$

（**2**）　う：$\dfrac{14}{3}t^2-8xt+4x^2$，　え：$\dfrac{4}{7}$

（**3**）　お：$\dfrac{2^{k-1}a_{k-1}}{a_{k-1}+2^{k-1}}$，　か：$\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}$

問 4

(**1**)　$b \neq 0$ より C_1 と C_2 は異なる曲線である。

　s，t を実数とする。$y = x^2$ を微分すると，$y' = 2x$ であるから，C_1 上の点 $(s,\ s^2)$ における C_1 の接線の方程式は

$$
\begin{aligned}
y &= 2s(x-s)+s^2 \\
&= 2sx - s^2 \ \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

である。これと同様に計算すると，C_2 上の点 $(t,\ at^2+bt+ab)$ における C_2 の接線の方程式は

$$
y = (2at+b)x - at^2 + ab \ \cdots\cdots ②
$$

である。2 本の接線 ①，② が一致するとき

$$
\begin{cases}
2s = 2at + b \\
-s^2 = -at^2 + ab
\end{cases}
$$

より

$$
\begin{cases}
s = at + \dfrac{b}{2} & \cdots\cdots ③ \\
s^2 = at^2 - ab & \cdots\cdots ④
\end{cases}
$$

である。③，④ より s を消去すると

$$
\left(at + \frac{b}{2}\right)^2 = at^2 - ab
$$

$$
(a^2-a)t^2 + abt + \frac{b^2}{4} + ab = 0 \ \cdots\cdots ⑤
$$

である。

　t の方程式 ⑤ が 2 次方程式にならないのは，$a^2 - a = 0$ と $a \neq 0$ より $a = 1$ のときである。このとき，⑤ は

$$
bt + \frac{b^2}{4} + b = 0
$$

$$
t = -\frac{b}{4} - 1 \quad (b \neq 0 \text{ より})
$$

である。さらに，③ より，この t の値に対応する s の値が 1 つ存在する。よって，「$a = 1$ かつ $b \neq 0$」のとき，共通接線がただ 1 つ存在する。

次に，$a \fallingdotseq 1$ のときを考える。⑤ の判別式を D とすると

$$D = (ab)^2 - 4(a^2 - a)\left(\frac{b^2}{4} + ab\right)$$
$$= ab(b - 4a^2 + 4a)$$

である。⑤ が重解をもつ条件は $D = 0$ であるため，$a \fallingdotseq 0$，$a \fallingdotseq 1$，$b \fallingdotseq 0$ に注意すると

$$b = 4a^2 - 4a \text{ かつ } b \fallingdotseq 0$$

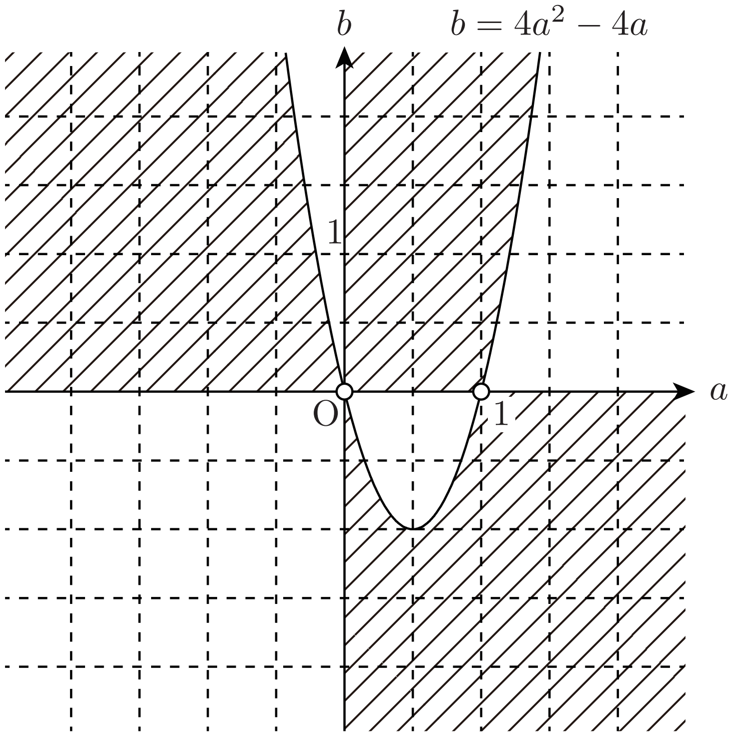
である。このとき，s，t の値が 1 つずつ存在するため，共通接線がただ 1 つ存在する。

以上をまとめると，求める必要十分条件は

「$a = 1$ かつ $b \fallingdotseq 0$」または「$b = 4a^2 - 4a$ かつ $b \fallingdotseq 0$」

である。

(**2**)



点 $(a,\ b)$ の存在する領域は左図の斜線部分である。ただし，b 軸と点 $(1,\ 0)$ は含まない。その他の境界線は含む。