

2020年度早稲田大学 商学部 数学 解答例

$$\square (1) \quad \text{ア} \quad \frac{1}{12}x^2$$

$$(2) \quad \text{イ} \quad 28$$

$$(3) \quad \text{ウ} \quad \frac{\pi}{505}$$

$$(4) \quad \text{エ} \quad -\frac{1}{15}$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad f(x) = x \text{ かつ}$$

$$4x(1-x) = x$$

$$x(3-4x) = 0$$

$$x = \underline{\underline{0, \frac{3}{4}}}$$

$$(2) \quad f(f^n(x)) = f^n(x) \text{ かつ,}$$

放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ との交点の
x座標は $f^n(x)$ である。

また、放物線と直線との交点は高々2個
であり、 $0 < x < \frac{1}{2}$ かつ $x < f(x)$ であるから、
 $f^n(x)$ は $f(x)$ または x に一致する。

$$[1] \quad f^2(x) \text{ が } f(x) \text{ に一致する場合, } f^n(x) = f(x) \quad (n \geq 1)$$

$$f(f(x)) = f(x)$$

$$4 - 4x(1-x) \{1 - 4x(1-x)\} = 4x(1-x)$$

$$4x(1-x) [4 \{1 - 4x(1-x)\} - 1] = 0$$

$$x(1-x)(16x^2 - 16x + 3) = 0$$

$$x(1-x)(4x-1)(4x-3) = 0$$

$$0 < x < \frac{1}{2} \text{ かつ } x = \frac{1}{4}, f(x) = \frac{3}{4}$$

ゆえに, 放物線 $y = f(x)$ は 2点 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ を通るので, $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$

$$[2] \quad f^2(x) \text{ が } \alpha \text{ に一致するとは, } f^n(x) = \begin{cases} f(x) & (n = \text{奇数}) \\ \alpha & (n = \text{偶数}) \end{cases}$$

$f(f(x)) - \alpha$ が $f(x) - \alpha$ で割り切れることを用いて

$$f(f(x)) - \alpha = 4 - 4x(1-x) \mid 1 - 4x(1-x) - \alpha$$

$$= \{4x(1-x) - \alpha\}(16x^2 - 20x + 5)$$

$$= \alpha(3 - 4\alpha)(16\alpha^2 - 20\alpha + 5) = 0$$

$$0 < \alpha < \frac{1}{2} \text{ かつ } \alpha = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}, f(\alpha) = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$$

ゆえに, 放物線 $y = f(x)$ は 2点 $(\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}, \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8})$

(複号同順) を通るので, $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{5}{16}$

以上より, $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ かつ $x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{5}{16}$

3

(1) $\{x_n\}$ は単調に増加する数列なので、 $1 \leq k_1 < k_2 \leq t$

であるすべての整数 k_1, k_2 に対して

$$m(k_1, t) \leq m(k_2, t)$$

が成り立つ。よって 1 以上 100 以下の整数 t が

(*) を満たす条件は

$$m(1, t) \geq 40$$

となることである。

$$\begin{aligned} m(1, t) &= \frac{1}{t} \sum_{n=1}^t n \\ &= \frac{t+1}{2} \end{aligned}$$

であるから

$$m(1, t) \geq 40$$

$$\frac{t+1}{2} \geq 40$$

$$t \geq 79$$

となるので、 $S(\{x_n\})$ の要素は

$$79, 80, 81, \dots, 100$$

の 22 個 である。

(2) $1 \leq k \leq l \leq 100$ である整数 k, l が (i), (ii) を満たすとき $k \leq j \leq l$ であるすべての整数 j に対し

$$m(k, j) < 40$$

であることを示す。

• $j = k$ のとき

(ii) より, $m(n_k, k) < 40$ となる 1 以上 k 以下の整数 n_k が存在し, n_k が $k-1$ 以下ならば

$$m(n_k, k) = \frac{(k-n_k) \times m(n_k, k-1) + \alpha_k}{k-n_k+1} < 40$$

$$\alpha_k < 40 - \{m(n_k, k-1) - 40\}(k-n_k)$$

となり, (i) より $m(n_k, k-1) \geq 40$ であるから

$$\alpha_k < 40$$

を得る。 $n_k = k$ ならば, $\alpha_k = m(n_k, k) < 40$ より

やはり同じ式が得られる。よって

$$m(k, k) = \alpha_k < 40$$

である。

• k 以上 $l-1$ 以下のある整数 j^* において $k \leq j \leq j^*$

であるすべての整数 j について $m(k, j) < 40$ と仮定する。

(ii) より, $m(n_{j^*+1}, j^*+1) < 40$ となる 1 以上 j^*+1 以下の整数 n_{j^*+1} が存在する。

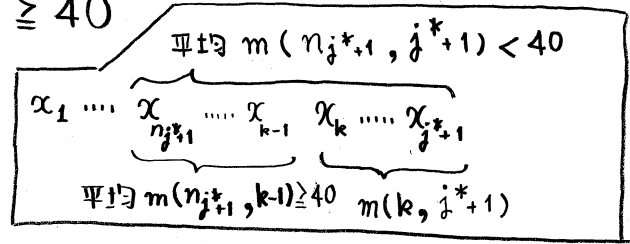
n_{j^*+1} が 1 以上 $k-1$ 以下であるならば, (i) より

$$m(n_{j^*+1}, k-1) \geq 40$$

であるから

$$m(k, j^*+1)$$

$$= \frac{(j^*+1 - n_{j^*+1} + 1) \times m(n_{j^*+1}, j^*+1) - (k-1 - n_{j^*+1} + 1) \times m(n_{j^*+1}, k-1)}{j^*+1 - k + 1}$$



$$< 40$$

となる。一方, n_{j^*+1} が $k+1$ 以上 j^*+1 以下であるならば, 仮定

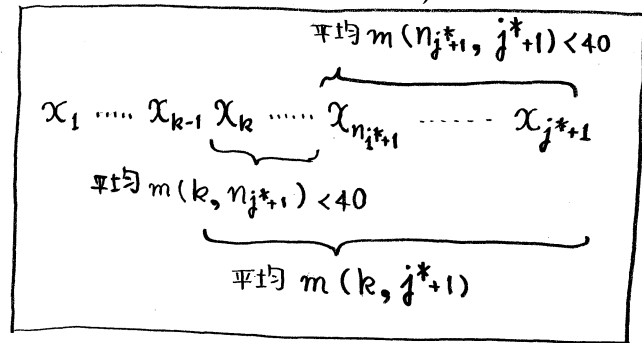
より

$$m(k, n_{j^*+1} - 1) < 40$$

であるから

$$m(k, j^*+1)$$

$$= \frac{(n_{j^*+1} - 1 - k + 1) \times m(k, n_{j^*+1} - 1) + (j^*+1 - n_{j^*+1} + 1) \times m(n_{j^*+1}, j^*+1)}{j^*+1 - k + 1}$$



$$< 40$$

となる。結局, n_{j^*+1} が k 以外の場合に

$$m(k, j^*+1) < 40$$

が得られるが, n_{j^*+1} の決め方から $n_{j^*+1} = k$ の場合も同じ式となる。

以上より 数学的帰納法により, $k \leq j \leq l$ であるすべての整数 j で $m(k, j) < 40$ が成り立つので $j = l$ の場合も示された。□

(3) まず $S(\{x_n\})$ の要素の個数 $N(S(\{x_n\}))$ が 16 個以下にならないことを示す。 $S(\{x_n\})$ の要素を小さい順に

$$t_1, t_2, \dots, t_{N(S(\{x_n\}))}$$

とすると, (2) より, $\{x_n\}$ の第 1 項から第 t_1 項までの間の項の平均 $m(1, t_1-1)$ は 40 未満であり, 同様に

$$S(\{x_n\}) \text{ の要素に対応する項の間の項のそれぞれの平均 } m(t_1+1, t_2-1), \dots, m(t_{N(S(\{x_n\}))}-1+1, t_{N(S(\{x_n\}))}-1), m(t_{N(S(\{x_n\}))}+1, 100)$$

はいずれも 40 未満である。なお $t_2 = t_1 + 1$ のように $S(\{x_n\})$ の要素が連続な整数である場合は間の平均は考えない。

結局, $S(\{x_n\})$ の要素になていない $100 - N(S(\{x_n\}))$ 個の整数に対応する項の平均は 40 未満になり, $S(\{x_n\})$ の要素に対応する各項の値は 100 以下であるから

$$\begin{aligned} m(1, 100) &< \frac{1}{100} \left[\{100 - N(S(\{x_n\}))\} \times 40 + N(S(\{x_n\})) \times 100 \right] \\ &= 40 + \frac{3}{5} N(S(\{x_n\})) \end{aligned}$$

となるが $N(S(\{x_n\})) \leq 16$ では

$$m(1, 100) < 49.6$$

となるので, $m(1, 100) \geq 50$ に反する。よって, $N(S(\{x_n\})) \geq 17$ である。

いま, 数列 $\{x_n\}$ の各項を

$$x_n = \begin{cases} 0 & (1 \leq n \leq 50) \\ 100 & (51 \leq n \leq 100) \end{cases}$$

と定めると

$$S(\{x_n\}) = \{84, 85, \dots, 99, 100\}$$

となり, $N(S(\{x_n\})) = 17$ は実現できる。

よて, 求める最小値は 17 である。