# 2020年度 早稲田大学 商学部 数学 解答例

$\boxed{1}$ (1) ア $\frac{1}{12}x^2$

(2) イ 28

(3) ウ $\frac{\pi}{505}$

(4) エ $-\frac{1}{15}$

$\boxed{2}$ (1) $g(x) = x$ より

$$4x(1-x) = x$$

$$x(3-4x) = 0$$

$$x = 0,\ \frac{3}{4}$$

(2) $f(g^n(\alpha)) = g^n(\alpha)$ より,

放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ との共有点の

$x$ 座標は $g^n(\alpha)$ である。

また，放物線と直線との共有点は高々2個

であり，$0 < \alpha < \frac{1}{2}$ より $\alpha < g(\alpha)$ であるから，

$g^n(\alpha)$ は $g(\alpha)$ または $\alpha$ に一致する。

[1] $g^2(\alpha)$ が $g(\alpha)$ に一致する場合，$g^n(\alpha) = g(\alpha)$ $(n \geqq 1)$

$$g(g(\alpha)) = g(\alpha)$$

$$4\cdot 4\alpha(1-\alpha)\{1-4\alpha(1-\alpha)\} = 4\alpha(1-\alpha)$$

$$4\alpha(1-\alpha)[4\{1-4\alpha(1-\alpha)\}-1] = 0$$

$$\alpha(1-\alpha)(16\alpha^2-16\alpha+3) = 0$$

$$\alpha(1-\alpha)(4\alpha-1)(4\alpha-3) = 0$$

$0 < \alpha < \frac{1}{2}$ より $\alpha = \frac{1}{4}$, $g(\alpha) = \frac{3}{4}$

ゆえに，放物線 $y=f(x)$ は 2点 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ を

通るので，$f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$

[2] $g^2(\alpha)$ が $\alpha$ に一致するとき，$g^n(\alpha) = \begin{cases} g(\alpha) & (n=\text{奇数}) \\ \alpha & (n=\text{偶数}) \end{cases}$

$g(g(\alpha))-\alpha$ が $g(\alpha)-\alpha$ で割り切れることを用いて

$$g(g(\alpha))-\alpha = 4\cdot4\alpha(1-\alpha)\{1-4\alpha(1-\alpha)\}-\alpha$$

$$=\{4\alpha(1-\alpha)-\alpha\}(16\alpha^2-20\alpha+5)$$

$$=\alpha(3-4\alpha)(16\alpha^2-20\alpha+5)=0$$

$0<\alpha<\frac{1}{2}$ より　$\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$，$g(\alpha) = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$

ゆえに，放物線 $y=f(x)$ は 2点 $\left(\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}, \frac{5\pm\sqrt{5}}{8}\right)$

（複号同順）を通るので，$f(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{5}{16}$

以上より，$f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ または $x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{5}{16}$

$\boxed{3}$

(1)　$\{x_n\}$ は単調に増加する数列なので，$1 \leqq k_1 < k_2 \leqq t$

であるすべての整数 $k_1, k_2$ に対して

$$m(k_1, t) \leqq m(k_2, t)$$

が成り立つ。よって　1 以上 100 以下の整数 $t$ が

(*) を満たす条件は

$$m(1, t) \geqq 40$$

となることである。

$$m(1, t) = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{t} n$$

$$= \frac{t+1}{2}$$

であるから

$$m(1, t) \geqq 40$$

$$\frac{t+1}{2} \geqq 40$$

$$t \geqq 79$$

となるので，$S(\{x_n\})$ の要素は

$$79, 80, 81, \cdots, 100$$

の 22 個 である。

(2) $1 \leqq k \leqq l \leqq 100$ である整数 $k, l$ が (i), (ii) を満たすとき $k \leqq j \leqq l$ であるすべての整数 $j$ に対し

$$m(k, j) < 40$$

であることを示す。

- $j = k$ のとき

(ii) より, $m(n_k, k) < 40$ となる 1以上 $k$ 以下の整数 $n_k$ が存在し, $n_k$ が $k-1$ 以下ならば

$$m(n_k, k) = \frac{(k-n_k) \times m(n_k, k-1) + x_k}{k - n_k + 1} < 40$$

$$x_k < 40 - \{m(n_k, k-1) - 40\}(k-n_k)$$

となり, (i) より $m(n_k, k-1) \geqq 40$ であるから

$$x_k < 40$$

を得る。$n_k = k$ ならば, $x_k = m(n_k, k) < 40$ より やはり同じ式が得られる。よって

$$m(k, k) = x_k < 40$$

である。

- $k$ 以上 $l-1$ 以下のある整数 $j^*$ において $k \leqq j \leqq j^*$ であるすべての整数 $j$ について $m(k, j) < 40$ と仮定する。

(ii) より, $m(n_{j^*+1}, j^*+1) < 40$ となる 1以上 $j^*+1$ 以下の整数 $n_{j^*+1}$ が存在する。

$n_{j^*+1}$ が 1 以上 $k-1$ 以下であるならば，(i) より

$$m(n_{j^*+1}, k-1) \geqq 40$$

であるから

$$x_1 \cdots x_{n_{j^*+1}} \cdots x_{k-1}\ \overbrace{x_{n_{j^*+1}} \cdots x_{k-1}\, x_k \cdots x_{j^*+1}}^{\text{平均 } m(n_{j^*+1},\, j^*+1) < 40}$$

$$x_1 \cdots \underbrace{x_{n_{j^*+1}} \cdots x_{k-1}}_{\text{平均 } m(n_{j^*+1},\, k-1) \geqq 40}\ \underbrace{x_k \cdots x_{j^*+1}}_{m(k,\, j^*+1)}$$

$$m(k, j^*+1)$$

$$= \frac{(j^*+1-n_{j^*+1}+1) \times m(n_{j^*+1}, j^*+1) - (k-1-n_{j^*+1}+1) \times m(n_{j^*+1}, k-1)}{j^*+1-k+1}$$

$$< 40$$

となる。一方，$n_{j^*+1}$ が $k+1$ 以上 $j^*+1$ 以下であるならば，仮定より

$$m(k, n_{j^*+1}-1) < 40$$

であるから

$$x_1 \cdots x_{k-1}\, x_k \cdots \overbrace{x_{n_{j^*+1}} \cdots\cdots x_{j^*+1}}^{\text{平均 } m(n_{j^*+1},\, j^*+1) < 40}$$

$$x_1 \cdots x_{k-1}\, \underbrace{x_k \cdots}_{\text{平均 } m(k,\, n_{j^*+1}) < 40}\ x_{n_{j^*+1}} \cdots\cdots x_{j^*+1}$$

$$x_1 \cdots x_{k-1}\, \underbrace{x_k \cdots x_{n_{j^*+1}} \cdots\cdots x_{j^*+1}}_{\text{平均 } m(k,\, j^*+1)}$$

$$m(k, j^*+1)$$

$$= \frac{(n_{j^*+1}-1-k+1) \times m(k, n_{j^*+1}-1) + (j^*+1-n_{j^*+1}+1) \times m(n_{j^*+1}, j^*+1)}{j^*+1-k+1}$$

$$< 40$$

となる。結局，$n_{j^*+1}$ が $k$ 以外の場合に

$$n(k, j^*+1) < 40$$

が得られるが，$n_{j^*+1}$ の決め方から $n_{j^*+1} = k$ の場合も同じ式となる。

以上より数学的帰納法により，$k \leqq j \leqq l$ であるすべての整数 $j$ で $m(k, j) < 40$ が成り立つので $j = l$ の場合も示された。▨

(3)　まず $S(\{x_n\})$ の要素の個数 $N(S(\{x_n\}))$ が 16個以下にならないことを示す。$S(\{x_n\})$ の要素を小さい順に

$$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_{N(S(\{x_n\}))}$$

とすると，(2) より，$\{x_n\}$ の第1項から第 $t_1$ 項までの間の項の平均 $m(1, t_1-1)$ は 40未満であり，同様に $S(\{x_n\})$ の要素に対応する項の間の項のそれぞれの平均

$$m(t_1+1, t_2-1),\ \cdots,\ m(t_{N(S(\{x_n\}))-1}+1,\ t_{N(S(\{x_n\}))}-1),\ m(t_{N(S(\{x_n\}))}+1,\ 100)$$

はいずれも 40未満である。なお $t_2=t_1+1$ のように $S(\{x_n\})$ の要素が連続な整数である場合は間の平均は考えない。

結局，$S(\{x_n\})$ の要素になっていない $100-N(S(\{x_n\}))$ 個の整数に対応する項の平均は 40未満になり，$S(\{x_n\})$ の要素に対応する各項の値は 100以下であるから

$$m(1,100) < \frac{1}{100}\left[\{100-N(S(\{x_n\}))\}\times 40 + N(S(\{x_n\}))\times 100\right]$$

$$= 40+\frac{3}{5}N(S(\{x_n\}))$$

となるが　$N(S(\{x_n\})) \leqq 16$ では

$$m(1,100) < 49.6$$

となるので，$m(1,100) \geqq 50$ に反する。よって，$N(S(\{x_n\})) \geqq 17$ である。

いま，数列 $\{x_n\}$ の各項を

$$x_n = \begin{cases} 0 & (1 \leqq n \leqq 50) \\ 100 & (51 \leqq n \leqq 100) \end{cases}$$

と定めると

$$S(\{x_n\}) = \{84, 85, \cdots, 99, 100\}$$

となり，$N(S(\{x_n\})) = 17$ は実現できる。

よって，求める最小値は $17$ である。