2021 年度　早稲田大学　理工学部　数学　解答例

[I]

(1)　直線 AP の傾きは

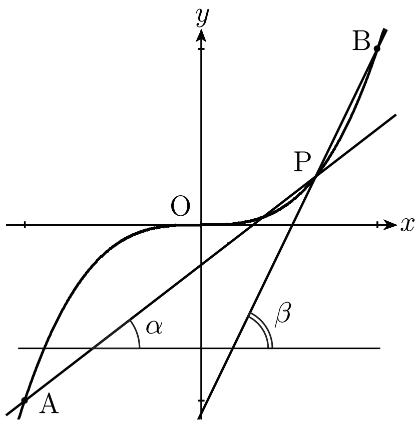
$$\frac{t^3-(-1)}{t-(-1)}=t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

となるので，$\tan\alpha=\underset{\sim\sim\sim\sim}{t^2-t+1}$ である。また，直線 PB の傾きは

$$\frac{t^3-1}{t-1}=t^2+t+1>0$$

となるので，$\tan\beta=\underset{\sim\sim\sim\sim}{t^2+t+1}$ である。

(2)　下の図から，$\angle\mathrm{APB}=\pi-(\beta-\alpha)$ である。



よって，(1) も用いると

$$\begin{aligned}\tan\angle\mathrm{APB}&=\tan\{\pi-(\beta-\alpha)\}\\&=\tan(\alpha-\beta)\\&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{(t^2-t+1)-(t^2+t+1)}{1+(t^2-t+1)(t^2+t+1)}\\&=\underset{\sim\sim\sim\sim}{-\frac{2t}{t^4+t^2+2}}\end{aligned}$$

である。

(3)　(1) より，$0 < t < 1$ において，$\tan\beta > \tan\alpha$ であるから，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ に注意すると，$\alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ である。さらに，$\angle\mathrm{APB} = \pi - (\beta - \alpha)$ であるから

$$\frac{\pi}{2} < \angle\mathrm{APB} < \pi$$

となる。この範囲において $\tan\angle\mathrm{APB}$ は単調に増加することから，$\angle\mathrm{APB}$ を最小にする t と $\tan\angle\mathrm{APB}$ を最小にする t は一致する。

そこで，(2) の答えを $f(t)$ とおくと，$0 < t < 1$ において

$$f'(t) = -2 \times \frac{1\cdot(t^4+t^2+2) - t\cdot(4t^3+2t)}{(t^4+t^2+2)^2} = \frac{2(t^2+1)(3t^2-2)}{(t^4+t^2+2)^2}$$

となるので，次の増減表を得る。

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

よって，$\tan\angle\mathrm{APB}$ は $t = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ のとき最小となるので，$\angle\mathrm{APB}$ を最小にする t の値は

$$t = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

である。

[**II**]

(1)　$x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$ であるから

$$x^6=(x^2+1)f(x)-1$$

となる。よって，x^6 を $f(x)$ で割ったときの余りは $\underset{\sim\sim}{-1}$ である。

(2)　任意の自然数 k について

$$x^{k+12}-x^k=x^k(x^6+1)(x^6-1)=x^k(x^2+1)(x^6-1)f(x)$$

が成り立つので，$x^{k+12}-x^k$ は $f(x)$ で割りきれる。したがって，「x^{k+12} を $f(x)$ で割ったときの余り」と「x^k を $f(x)$ で割ったときの余り」は一致する。$2021=12\cdot 168+5$ に注意して，これをくり返し用いると

$$\begin{aligned}(x^{2021}\text{を } f(x) \text{ で割ったときの余り}) &= (x^{2021-12}\text{を } f(x) \text{ で割ったときの余り})\\ &= \cdots\\ &= (x^5\text{を } f(x) \text{ で割ったときの余り})\end{aligned}$$

となり，$x^5=xf(x)+x^3-x$ であるから，x^{2021} を $f(x)$ で割ったときの余りは $\underset{\sim\sim\sim\sim}{x^3-x}$ である。

(3)　自然数 n が 3 の倍数であるとき，$n=3m$ となる自然数 m が存在して

$$(x^2-1)^n-1=(x^2-1)^{3m}-1$$

と変形できる。任意の自然数 m について

$$\begin{aligned}\left\{(x^2-1)^{3(m+1)}-1\right\}-\left\{(x^2-1)^{3m}-1\right\} &= \left\{(x^2-1)^3-1\right\}(x^2-1)^{3m}\\ &= \left(x^6-3x^4+3x^2-2\right)(x^2-1)^{3m}\\ &= (x^2-2)f(x)(x^2-1)^{3m}\end{aligned}$$

が成り立つので，$\left\{(x^2-1)^{3(m+1)}-1\right\}-\left\{(x^2-1)^{3m}-1\right\}$ は $f(x)$ で割りきれる。したがって，「$(x^2-1)^{3(m+1)}-1$ を $f(x)$ で割ったときの余り」と「$(x^2-1)^{3m}-1$ を $f(x)$ で割ったときの余り」は一致する。これをくり返し用いると

$$
\begin{aligned}
&(\,(x^2-1)^{3m}-1 \text{ を } f(x) \text{ で割ったときの余り}\,)\\
=&(\,(x^2-1)^{3(m-1)}-1 \text{ を } f(x) \text{ で割ったときの余り}\,)\\
=&\cdots\\
=&(\,(x^2-1)^{3}-1 \text{ を } f(x) \text{ で割ったときの余り}\,)\\
=&(\,(x^2-2)f(x) \text{ を } f(x) \text{ で割ったときの余り}\,)\\
=&0
\end{aligned}
$$

であるから，$(x^2-1)^{3m}-1$ は $f(x)$ で割りきれる。よって，n が 3 の倍数であるとき，$(x^2-1)^n-1$ が $f(x)$ で割り切れることが示された。(証明終わり)

[III]

(1)

$$\alpha^2=(2+i)^2=3+4i\fallingdotseq 0$$

$$\beta^2=\left(-\frac{1}{2}+i\right)^2=-\frac{3}{4}-i\fallingdotseq 0$$

であるから，$\alpha^2=-4\beta^2$ が得られる。よって，C，D はいずれも O とは異なり，点 O は線分 CD を 4 : 1 に内分する点である。したがって，複素数平面上の 3 点 C，D，O は一直線上にある。(証明終わり)

(2)　α，β の虚部はともに 1 であるため，複素数平面上で直線 AB は複素数 i に対応する点を通る実軸に平行な直線である。よって，実数 t を用いて，$z=t+i$ と表され

$$z^2=t^2-1+2ti$$

となる。t が実数であるから，t^2-1，$2t$ も実数であり，$x=t^2-1$，$y=2t$ となる。なお，P が直線 AB 上を動くことに対応して，実数 t はすべての実数をとりうる。したがって，y もすべての実数をとりうる。このもとで，t を消去すると

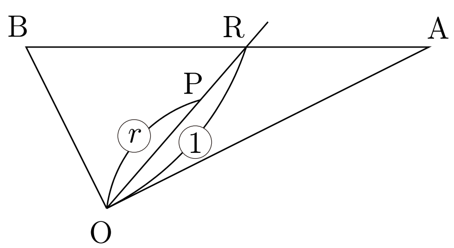
$$x=\frac{y^2}{4}-1$$

となる。よって，点 Q の軌跡の方程式は $x=\dfrac{y^2}{4}-1$ である。

(3)　線分 AB 上の点 R(w) と原点 O を結ぶ線分 OR 上に点 P(z) があるとき (ただし，2 点 O，R は除く)，OP : OR $=r:1$ となる実数 $r\,(0<r<1)$ を用いることで

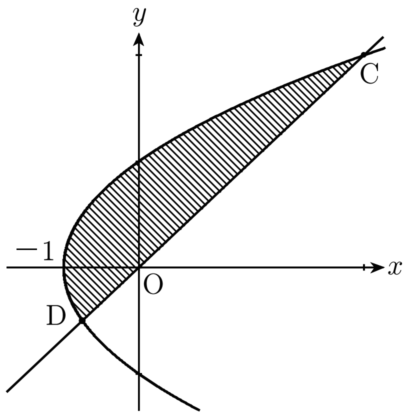
$$z=rw,\ z^2=r^2w^2$$

と表せる。よって，このとき点 Q(z^2) は，点 R$'(w^2)$ と原点 O とを結ぶ線分 OR$'$ を $r^2:(1-r^2)$ に内分する点である。点 P(z) が原点 O に一致するとき，点 Q(z^2) も原点 O に一致する。



したがって，点 P が線分 AB 上の点 R と原点 O とを結ぶ線分 OR 上を動くとき，点 Q は線分 OR′ 上をくまなく動く。また，点 R が線分 AB 上を動くとき，R′ は (2) で求めた放物線上の点 C から点 D の間を動く。

以上の議論より，K は (2) で求めた放物線と直線 CD で囲まれた図形となる。これを図示すると次図の斜線部となる。ただし，境界を含む。



(4)　点 P(z) が直線 CD 上にあるとき，z の実部を x，虚部を y とすると

$$x=\frac{3}{4}y$$

となるので，(3) の図形 K の面積は

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{4}\left\{\frac{3}{4}y-\left(\frac{y^2}{4}-1\right)\right\}dy&=-\frac{1}{4}\int_{-1}^{4}(y-4)(y+1)dy\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\{4-(-1)\}^3\\&=\frac{125}{24}\end{aligned}$$

である。

[**IV**]

玉と箱はそれぞれ全て区別して考える。各箱に入った玉の個数を大きい順に a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n とする ($a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq 0$)。

(1)　起こりうるのは次の 2 通りである。

(a)　$a_1 = 2$，$a_2 = 1$

(b)　$a_1 = 3$，$a_2 = 0$

(a) のとき $\ell = 1$ であり，(b) のとき $\ell = 3$ である。よって

$$P_0 = P_2 = 0$$

である。(b) が起こる確率は，3 個の玉が入る箱の選び方が 2 通りあるので

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2 = \frac{1}{4}$$

となる。よって

$$P_3 = \frac{1}{4},\ P_1 = 1 - (P_0 + P_2 + P_3) = \frac{3}{4}$$

である。

(2)　各箱に入った玉の個数は

(c)　$a_1 = a_2 = 1$，$a_j = 0\,(j \neq 1, 2;\ n = 2$ のときは $a_j = 0$ となる j はなし)

(d)　$a_1 = 2$，$a_j = 0\ \ (j \neq 1)$

のいずれかである。(c) のとき $\begin{cases} \ell = 0 & (n = 2) \\ \ell = 1 & (n \geqq 3) \end{cases}$ であり，(d) のとき $\ell = 2$ である。

(d) が起こる確率は，2 個の玉が入る箱の選び方が n 通りあるので

$$n \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}$$

であり，(d) 以外は (c) しか起こりえないので，(c) が起こる確率は

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

となる。

よって

$$\begin{cases} n = 2 \text{ のとき} \quad P_0 = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2},\ P_1 = 0,\ P_2 = \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{1}{2} \\ n \geqq 3 \text{ のとき} \quad P_0 = 0,\ P_1 = \dfrac{n-1}{n},\ P_2 = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

である。

(3)　各箱に入った玉の個数は

(e)　$a_1 = a_2 = a_3 = 1$，$a_j = 0$

$(j \neq 1,\ 2,\ 3;\ n = 3$ のときは $a_j = 0$ となる j はなし$)$

(f)　$a_1 = 2$，$a_2 = 1$，$a_j = 0$ $(j \neq 1,\ 2)$

(g)　$a_1 = 3$，$a_j = 0$ $(j \neq 1)$

のいずれかである。(e) のとき $\begin{cases} \ell = 0 & (n = 3) \\ \ell = 1 & (n \geqq 4) \end{cases}$ であり，(f) のとき $\ell = 2$，(g) のとき $\ell = 3$ である。

(g) が起こる確率は，3 個の玉が入る箱の選び方が n 通りあるので

$$n \times \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^2}$$

である。また，(e) が起こる確率は，1 個の玉が入る箱の選び方が ${}_n\mathrm{C}_3$ 通りあるので

$${}_n\mathrm{C}_3 \times \frac{3}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$$

である。ここで，(e)，(g) 以外は (f) しか起こりえないので，(f) が起こる確率は

$$1 - \left\{\frac{1}{n^2} + \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\right\} = \frac{3(n-1)}{n^2}$$

となる。

よって

$$\begin{cases} n = 3\ のとき & P_0 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{n^2} = \dfrac{2}{9},\ P_1 = 0 \\ & P_2 = \dfrac{3(n-1)}{n^2} = \dfrac{2}{3},\ P_3 = \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{9} \\ n \geqq 4\ のとき & P_0 = 0,\ P_1 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{n^2},\ P_2 = \dfrac{3(n-1)}{n^2},\ P_3 = \dfrac{1}{n^2} \end{cases}$$

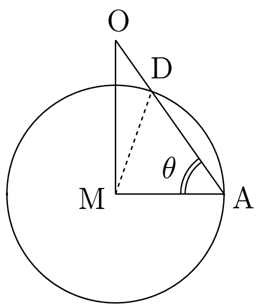
である。

[**V**]

(1)　三角形 ABC の外接円の半径を r とする。正弦定理より

$$\mathrm{BC} = 2r\sin 60^\circ = \sqrt{3}r$$

となるから，正四面体 OABC の各辺の長さは $\sqrt{3}r$ である。



また，四面体 OABC は正四面体であるから，点 O から三角形 ABC に下ろした垂線は三角形 ABC と M において交わる。よって，三角形 OAM は直角三角形であり，$\angle\mathrm{OAM} = \theta$ とおくと

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{OA}} = \frac{r}{\sqrt{3}r} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる。三角形 AMD は $\mathrm{AM} = \mathrm{MD} = r$ の二等辺三角形であるから

$$\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{OA}} = \frac{2\mathrm{AM}\cos\theta}{\mathrm{OA}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}r}{\sqrt{3}r} = \frac{2}{3}$$

となり

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

である。同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1}{3}\vec{b}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{1}{3}\vec{c}$$

である。

次に，線分 AB，DE の中点をそれぞれ L，N とおくと，A と B，D と E は直線 OL について対称の位置にあるので，4 点 A，B，D，E を通る円の中心は直線 OL 上にある。三角形 OAL と三角形 ODN の相似関係より

$$\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OL}}=\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}}=\frac{1}{3}\qquad\cdots\cdots(*)$$

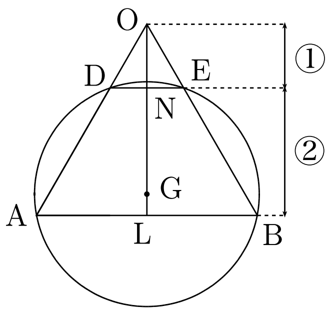
であり，$\mathrm{OL}=\mathrm{OA}\sin 60^\circ=\frac{3}{2}r$ も用いると

$$\mathrm{NL}=\frac{2}{3}\mathrm{OL}=r,\ \mathrm{DN}=\frac{1}{3}\mathrm{AL}=\frac{\sqrt{3}}{6}r$$

となる。ここで $\mathrm{GN}=x$ とおくと，三角形 DGN と三角形 ALG はいずれも直角三角形で，$\mathrm{DG}=\mathrm{AG}$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{DN}^2+\mathrm{GN}^2&=\mathrm{AL}^2+\mathrm{GL}^2\\ \left(\frac{\sqrt{3}}{6}r\right)^2+x^2&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2+(r-x)^2\\ x&=\frac{5}{6}r\end{aligned}$$

となる。



よって

$$\frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OL}}=\frac{\frac{1}{2}r+\frac{5}{6}r}{\frac{3}{2}r}=\frac{8}{9}\qquad\cdots\cdots(**)$$

となるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{8}{9}\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{8}{9}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$$

である。

(2)　三角形 OAB と三角形 ODE の相似比は $3:1$ であるから

$$\triangle \mathrm{ODE} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_1 = \frac{1}{9}S_1$$

となる。$(*)$, $(**)$ より

$$\frac{1}{9}S_1 : S_2 = \mathrm{ON} : \mathrm{OG} = 3 : 8$$

であるから

$$S_1 : S_2 = \underline{27 : 8}$$

である。