2021　早稲田大学　教育学部　数学　解答例

1

(1)　$-3 \pm \sqrt{7}$　(2)　$\dfrac{2}{3}\pi$　(3)　$\dfrac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{e^{2-\sqrt{2}}}$　(4)　30 通り

2

(1)　半径が 1 の円の中心 O が原点，点 A の座標が $(-1,\ 0)$ となるように座標を定める。

(i)　B，C が x 軸に関して同じ側にあるとき

ともに円周のうち，$y>0$ の部分にあるとすれば

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\cos 2\beta,\ \sin 2\beta),\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\cos 2\gamma,\ \sin 2\gamma)$$

とおける。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ より

$$1+b\cos 2\beta+c\cos 2\gamma=0 \quad \cdots ①$$

$$b\sin 2\beta+c\sin 2\gamma=0 \quad \cdots ②$$

となり，① × $\sin 2\gamma$ − ② × $\cos 2\gamma$ より

$$-\sin 2\gamma+b\sin(2\gamma-2\beta)=0$$

$$b\sin(2\gamma-2\beta)=\sin 2\gamma$$

である。ここで，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\beta \neq \gamma$ であるから

$$-\pi<2\gamma-2\beta<0,\ 0<2\gamma-2\beta<\pi$$

よって，$\sin(2\gamma-2\beta) \neq 0$ となるので

$$b=\frac{\sin 2\gamma}{\sin(2\gamma-2\beta)}$$

これを②に代入して

$$c=-\frac{\sin 2\beta}{\sin(2\gamma-2\beta)}$$

となる。

(ii)　B，C が x 軸に関して反対側にあるとき

B が円周のうち，$y>0$ の部分にあるとすれば

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\cos 2\beta,\ \sin 2\beta),\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\cos 2\gamma,\ -\sin 2\gamma)$$

とおける。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ より

$$1+b\cos 2\beta+c\cos 2\gamma=0 \quad \cdots ③$$

$$b\sin 2\beta-c\sin 2\gamma=0 \quad \cdots ④$$

である。③，④はそれぞれ，①，②の γ を $-\gamma$ で置き換えることにより得られる式であるから

$$b=\frac{\sin 2(-\gamma)}{\sin(-2\gamma-2\beta)}=\frac{\sin 2\gamma}{\sin(2\gamma+2\beta)}$$

$$c=-\frac{\sin 2\beta}{\sin(-2\gamma-2\beta)}=\frac{\sin 2\beta}{\sin(2\gamma+2\beta)}$$

となる。

(iii)　B，C の一方が x 軸上にあるとき

$\beta=0$ または $\gamma=0$，すなわち，$(b,\ c)=(1,\ 0)$ または $(0,\ 1)$ となるが，これは (ii) の結果において，$\beta=0$ もしくは $\gamma=0$ としたときのものと一致する。

以上より

$$(b,\ c)=\left(\frac{\sin 2\gamma}{\sin(2\gamma\pm 2\beta)},\ \frac{\pm\sin 2\beta}{\sin(2\gamma\pm 2\beta)}\right)$$

となる。

(2)　(1) と同様に座標を設定した場合で，かつ $b=c$ のときを考える。

(1) の (i) の場合になるとすれば，②より

$$b(\sin 2\beta+\sin 2\gamma)=0$$

つまり，$b=0$ または $\sin 2\beta+\sin 2\gamma=0$ となるが，これは不適。(2) の (ii) の場合になるとすれば，④より

$$b(\sin 2\beta-\sin 2\gamma)=0$$

つまり，$b=0$ または $\sin 2\beta-\sin 2\gamma=0$ となるが，$b=0$ は不適。また，後者のとき

$$\sin 2\beta-\sin 2\gamma=0$$

$$2\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)=0$$

より，$\beta=\gamma$ となるので，B, C は x 軸に関して対称な位置にある。

このとき，(1) の結果より

$$b=\frac{\sin 2\beta}{\sin 4\beta}=\frac{1}{2\cos 2\beta}\quad\cdots⑤$$

である。垂心 H は直線 OA 上にあるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

とおける．$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

$$\left(t\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=0$$

$$t(-\cos 2\beta)-\left(2\cos^2 2\beta-1\right)-\cos 2\beta-t=0$$

$$t\left(\cos 2\beta+1\right)=1-2\cos^2 2\beta-\cos 2\beta$$

$$t=\frac{-\left(2\cos 2\beta-1\right)\left(\cos 2\beta+1\right)}{\cos 2\beta+1}$$

$$t=1-2\cos 2\beta$$

⑤より

$$t=1-\frac{1}{b}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(1-\frac{1}{b}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

である。

$\boxed{3}$

与えられた x の 3 次関数を a と x の関数とみて

$$f(x,\ a)=x^3-2ax+a^2$$

と定義する。

(1)　直線 $x=\dfrac{1}{2}$ と A との共通部分に属する点の y 座標のとり得る値の範囲は，a が $0\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くときの

$$f\left(\frac{1}{2},\ a\right)=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$$

がとり得る値の範囲である。右辺を a の 2 次関数とみると，$0\leqq a\leqq 1$ において

$$-\frac{1}{8}\leqq f\left(\frac{1}{2},\ a\right)\leqq\frac{1}{8}$$

である。したがって，直線 $x=\dfrac{1}{2}$ と A との共通部分に属する点の y 座標のとり得る範囲は

$$-\frac{1}{8}\leqq (y\ \text{座標})\leqq\frac{1}{8}$$

である。

(2)　t を $0\leqq t\leqq 1$ を満たす実数として，直線 $x=t$ と A との共通部分に属する点の y 座標 y_t のとり得る範囲は，a が $0\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くときの

$$f(t,\ a)=(a-t)^2+t^3-t^2$$

がとり得る値の範囲である。いま，

$$f(t,\ a)\geqq t^3-t^2$$

$m(t)=t^3-t^2$ とおくと，A に属する点の y 座標の最小値は $m(t)$ の最小値である。

$$m'(t)=3t^2-2t=3t\left(t-\frac{2}{3}\right)$$

であるから，次の増減表を得る。

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$m'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$m(t)$		$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$	

よって，$m(t)$ は $t=\dfrac{2}{3}$ で最小値 $-\dfrac{4}{27}$ をとる。したがって，A に属する点の y 座標の最小値は $-\dfrac{4}{27}$ である。

(3)　$f(x,\ 0)$ と $f(x,\ 1)$ の小さくない方を $M(x)$ とおく。(2) より，A は 2 つの不等式 $m(x) \leqq y \leqq M(x)$ かつ $0 \leqq x \leqq 1$ で表される領域である。よって，A の面積 S は

$$S=\int_0^1 (M(x)-m(x))\,dx$$

である。ここで，$f(x,\ 1)-f(x,\ 0)=1-2x$ であるから

$$M(x)=\begin{cases} f(x,\ 1) & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ f(x,\ 0) & \left(\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1\right) \end{cases}$$

となり

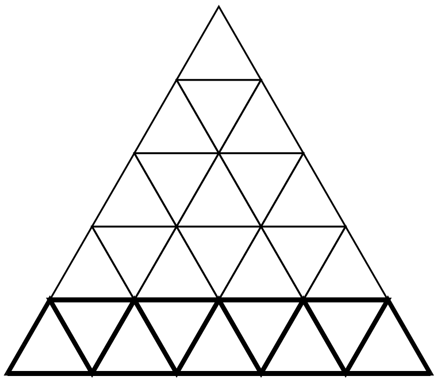
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{2}} \{(x^3-2x+1)-(x^3-x^2)\}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \{(x^3)-(x^3-x^2)\}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (x-1)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

である。

$\boxed{4}$

1 辺の長さが 1 の正三角形を n 段 (ただし n は自然数) を積んだとき，上向きの正三角形の総数を a_n，下向きの正三角形の総数を b_n とおく。

(1)　1 辺の長さが 1 の正三角形を 5 段積んだとき，最下段の 9 個の正三角形 (図の太線のもの) に着目する。



上向き三角形で，最下段の正三角形のいずれかを含むもののうち

1 辺の長さが 1 のものは　5 個

1 辺の長さが 2 のものは　4 個

1 辺の長さが 3 のものは　3 個

1 辺の長さが 4 のものは　2 個

1 辺の長さが 5 のものは　1 個

であるから，$a_5 = a_4 + (5+4+3+2+1) = 35$ となる。また，下向き三角形で，最下段の正三角形のいずれかを含むもののうち

1 辺の長さが 1 のものは　4 個

1 辺の長さが 2 のものは　2 個

1 辺の長さが 3 のものは　0 個

1 辺の長さが 4 のものは　0 個

1 辺の長さが 5 のものは　0 個

であるから，$b_5 = b_4 + (4+2) = 13$ となる。よって，上向きと下向きとを合わせた正三角形の総数は

$$a_5 + b_5 = \underline{48}$$

である。

(2)　(1) と同様に，1 辺の長さが 1 の正三角形を $n+1$ 段積んだとき，最下段の $(n+1)+n=2n+1$ 個の正三角形に着目する。

上向き三角形で，最下段の正三角形のいずれかを含むもののうち，1 辺の長さが k (k は $1 \leqq k \leqq n+$ を満たす自然数) のものは $(n+2-k)$ 個であるから

$$a_{n+1}=a_n+\sum_{k=1}^{n+1}(n+2-k)=a_n+\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

となる。$a_1=1$ も用いると，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}-\frac{k(k+1)(k+2)}{6}\right\} \\ &= 1+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-1 \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

となる (これは $n=1$ のときも適する)。よって，上向きの正三角形の総数は $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ である。

(3)　1 辺の長さが 1 の正三角形を $n+2$ 段積んだとき，最下段とその 1 つ上の段の $(n+2)+(n+1)+(n+1)+n=4n+4$ 個の正三角形に着目する。

下向き三角形で，最下段とその 1 つ上の段の正三角形のいずれかを含むもののうち

1 辺の長さが 1 のものは　$(n+1)+n$ 個
1 辺の長さが 2 のものは　$(n-1)+(n-2)$ 個
1 辺の長さが 3 のものは　$(n-3)+(n-4)$ 個

$$\vdots$$

となるので

$$b_{n+2}=b_n+\sum_{k=1}^{n+1}(n+2-k)=b_n+\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

となる。n が偶数のとき，$n=2m$ として

$$b_{2(m+1)}=b_{2m}+\frac{(2m+1)(2m+2)}{2}$$

であり，$b_2=1$ も用いると，$m \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
b_{2m} &= b_2+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}\\
&= b_2+\sum_{k=1}^{m-1}\left(2k^2+3k+1\right)\\
&= 1+\frac{1}{3}m(m-1)(2m-1)+\frac{3}{2}m(m-1)+(m-1)\\
&= \frac{1}{6}m(m+1)(4m-1)
\end{aligned}
$$

となる (これは $m=1$ のときも適する)。よって，n が偶数のときは

$$
b_n=b_{2m}=\frac{1}{24}n(n+2)(2n-1)
$$

である。

　また，n が奇数のとき，$n=2m-1$ として

$$
b_{2m+1}=b_{2m-1}+\frac{2m(2m+1)}{2}
$$

であり，$b_1=0$ も用いると，$m \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
b_{2m+1} &= b_1+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{2k(2k+1)}{2}\\
&= b_1+\sum_{k=1}^{m-1}\left(2k^2+k\right)\\
&= 0+\frac{1}{3}m(m-1)(2m-1)+\frac{1}{2}m(m-1)\\
&= \frac{1}{6}m(m-1)(4m+1)
\end{aligned}
$$

となる (これは $m=1$ のときも適する)。よって，n が奇数のときは

$$
b_n=b_{2m-1}=\frac{1}{24}(n+1)(n-1)(2n+3)
$$

である。以上より，下向きの正三角形の総数は

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{24}n(n+2)(2n-1) & (n\text{ が偶数のとき})\\[2ex]
\dfrac{1}{24}(n+1)(n-1)(2n+3) & (n\text{ が奇数のとき})
\end{cases}
$$

である。