2021 年度　早稲田大学　商学部　数学　解答例

$\boxed{1}$

(1)

ア
$\dfrac{1+x}{1-x}$

(2)

イ
4044

(3)

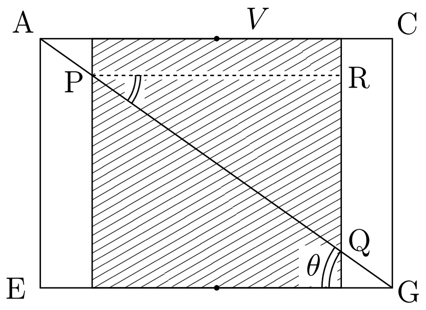
ウ
48

(4)

エ
1860

$\boxed{2}$

(1)　平面 AEGC による切り口は次の通り。なお，円柱 V の断面を斜線部で表した(境界を含む)。直線 AG と円柱 V の側面の 2 つの交点を，A に近い順に P，Q とする。また，P を通り直線 AC に平行な直線と円柱の側面の交点のうち，P でない方を R とする。立方体の対角線 AG と円柱 V の共通部分として得られる線分は線分 PQ であるから，線分 PQ の長さを求める。



さて，線分 PR の長さは，円柱の底面の円の直径に相当するため，$\mathrm{PR}=2$ である。また，三角形 AEG に着目すると $\angle \mathrm{E}=90^\circ$ であるから，$\angle \mathrm{AGE}=\theta$ とすると

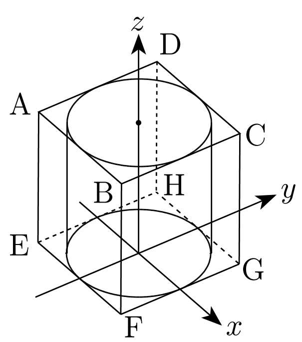
$$\cos\theta=\frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{AG}}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

である。よって

$$\mathrm{PQ}=\frac{\mathrm{PR}}{\cos\theta}=\frac{2}{\sqrt{\frac{2}{3}}}=\sqrt{6}$$

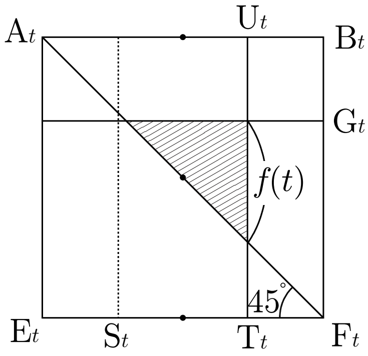
である。

(2)　A$(-1,\ -1,\ 2)$，E$(-1,\ -1,\ 0)$，G$(1,\ 1,\ 0)$ となるように，座標空間上に立方体 ABCD-EFGH を配置する。



さて，円柱 V の側面に含まれる線分とは，z 軸に平行なもののみしか存在しないので，z 軸に平行な断面で考えたときに現れるものですべてである。そこで，y 軸

上の点 $(0,\ t,\ 0)$(t は $-1 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数) を通り，zx 平面に平行な平面 H_t による断面を考える。この断面に現れる図形は次の通り。なお，A_t，E_t，F_t，B_t，G_t は，5 つの線分 AD，EH，FG，BC，BG と平面 H_t との交点であり，さらに，円柱 V の断面と W の断面の共通部分を斜線部 (境界を含む) で表した。



さて，平面 H_t による円柱 V の側面の切り口には，$-1 < t < 1$ のとき，2 本の線分が現れるが，その端点のうち，面 EFGH 上にあるもので，面 AEHD に近いものを S_t，他方を T_t とおき，T_t を含む線分の端点のうち面 ABCD 上にあるものを U_t とおく。

すると，円柱 V の側面と W の共通部分に含まれる線分で，平面 H_t 上にあるものは高々 2 本であるが，そのうち，最大となり得る方の線分は，面 BFGC に近い側のものである。よって，線分 $\mathrm{U}_t\mathrm{T}_t$ と斜線部の交わりで得られる線分の長さ $f(t)$ の最大値を考えればよいことになる。

2 点 S_t，T_t の y 座標はともに t で，z 座標はともに 0 であり，原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上にあるので

$$\mathrm{S}_t\left(-\sqrt{1-t^2},\ t,\ 0\right),\ \mathrm{T}_t\left(\sqrt{1-t^2},\ t,\ 0\right)$$

である。また，$\mathrm{F}_t(1,\ t,\ 0)$，$\mathrm{G}_t(1,\ t,\ 1-t)$ であるから

$$f(t) = \mathrm{G}_t\mathrm{F}_t - \mathrm{T}_t\mathrm{F}_t\tan 45^\circ = 1 - t - \left(1 - \sqrt{1-t^2}\right) = \sqrt{1-t^2} - t$$

となる。なお，上図斜線部と線分 $\mathrm{A}_t\mathrm{F}_t$ の交点のうち，A_t に近い点の x 座標が t であることより，上図斜線部が存在するための条件は $t \leqq \sqrt{1-t^2}$ である。これを解いて $-1 \leqq t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。ここで，$t = \cos\theta$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ に対応して $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \pi$ で考えて

$$f(t) = \sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

となるので，$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ で最大値 $\sqrt{2}$ をとる。よって，円柱 V の側面と W の共通部分に含まれる線分の長さの最大値は $\sqrt{2}$ である。

$\boxed{3}$

(1)　$225=3^2\cdot 5^2$ であるから，すべての正の約数の和は

$$\left(1+3+3^2\right)\left(1+5+5^2\right)=13\cdot 31=\underset{\sim\sim\sim}{403}$$

である。

(2)　自然数 N $(N>1)$ を素因数分解したときに現れる素数を小さい順に p_1，p_2，p_3，$\cdots$，p_n として

$$N=p_1^{q_1}p_2^{q_2}p_3^{q_3}\cdots p_n^{q_n}$$

と表せるとすると，N のすべての正の約数の和 $S(N)$ は

$$\begin{aligned}S(N)=&\left(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{q_1}\right)\times\left(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{q_2}\right)\\&\times\left(1+p_3+p_3^2+\cdots+p_3^{q_3}\right)\times\cdots\times\left(1+p_n+p_n^2+\cdots+p_n^{q_n}\right)\end{aligned}$$

である。ここで，$S(N)$ が奇数である条件は

$$\begin{aligned}&\left(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{q_1}\right),\ \left(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{q_2}\right),\\&\quad\left(1+p_3+p_3^2+\cdots+p_3^{q_3}\right),\ \cdots,\ \left(1+p_n+p_n^2+\cdots+p_n^{q_n}\right)\end{aligned}$$

がすべて奇数になることである。$p_1=2$ のときは，任意の q_1 について $\left(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{q_1}\right)$ は奇数である。一方，2 以外の素数は奇数であるから，奇数の素数 p_i について $\left(1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{q_i}\right)$ が奇数になる条件は

$$q_i\text{が偶数}$$

となることである。

以上より，奇数の素数の部分をまとめること，および $N=1$ の場合を考えることにより，正の整数 N について，$S(N)$ が奇数となる条件は

$$N=2^k(\text{奇数})^2\quad(k\text{ は 0 以上の整数})$$

となることである。これは

$$N=m^2\ \text{ または }\ N=2m^2\quad(m\text{ は正の整数})$$

であることを意味するから，$31^2=961$，$32^2=1024$，$44^2=1936$，$45^2=2025$ より $N=m^2$ のとき $1\leqq m\leqq 44$，$N=2m^2$ のとき $1\leqq m\leqq 31$ である。

以上より，2021 以下の正の整数ですべての正の約数の和が奇数であるものの個数は

$$44+31=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{75\ (\text{個})}$$

である。