2024　早稲田大学　（2/21 実施　商学部）　数学）　解答例

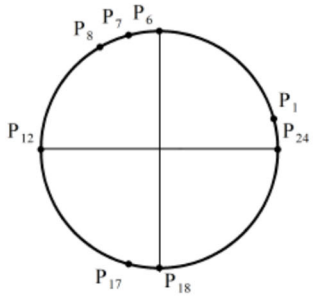
1

ア	イ	ウ	エ
1937	40	$C^{2n(-1)^{n-1}-1}$	$s^2-t=\dfrac{36}{25}$

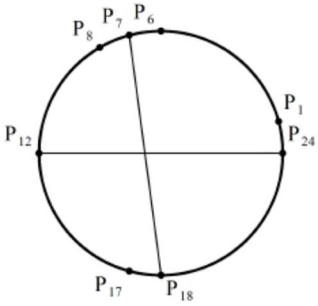
2

(1)

R の面積が S_1 となるのは，R の 2 つの対角線が直交して，どちらの長さも最大の 2 となるときである．



R の面積が S_2 となるとき，R の対角線の 1 つは最大の長さ 2 であるときを考えればよい．
その対角線の端の点は $(1,0)$，$(-1,0)$ としても一般性を失わない．
このとき，残りの 2 点が $(0,-1)$，$\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi, \sin\dfrac{7}{12}\pi\right)$ のようなとき，面積は 2 番目に小さくなる．



よって

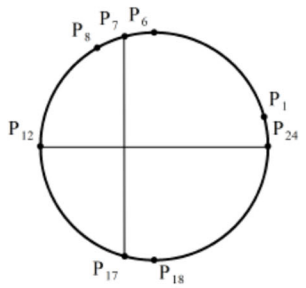
$$S_2=2\cdot\frac{1}{2}\left(1+\sin\frac{7}{12}\pi\right)=1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

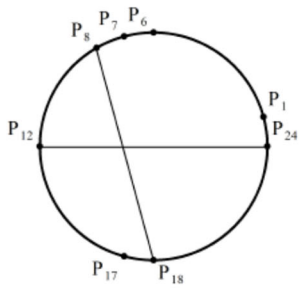
(2)

S_3 の候補としては，正 24 角形の最も長い対角線を使う場合と，2 番目に長い対角線を使う場合が考えられる．

(i)　最も長い対角線を使う場合

長さ 2 の対角線を底辺とするとき，高さが 2 番目に大きくなる候補には次のような場合がある．



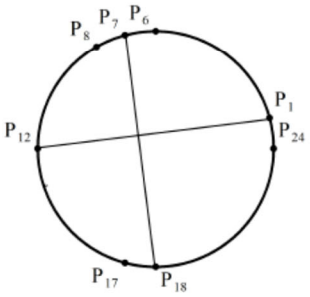


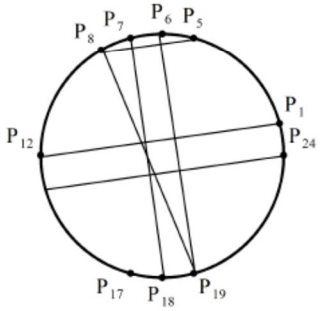
これらの面積はそれぞれ $\dfrac{1}{2}\cdot 2\left(2\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)$，$\dfrac{1}{2}\cdot 2\left(\sin\dfrac{8}{12}\pi+1\right)$ となり

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{2}+1$$

であるので左の図が S_3 の候補となる．

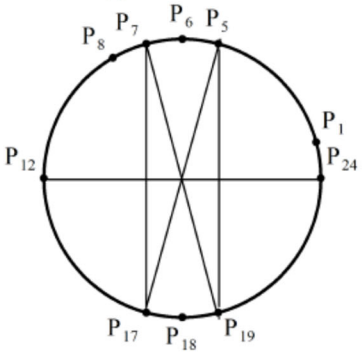
(ii)　2 番目に長い対角線を使い，最も長い対角線は使わない場合





面積が最大となるのは左図のようなときであり，これは S_2 である．これより面積が小さいものは (i) の最大のものより小さくなるので S_3 とならない．

以上より (i) の左のような面積となるときが求める場合である．



確率を求める．その際 $a=24$ としても確率は変わらない．

(A)　P_{12} が選ばれるとき

P_{12},(P_5 or P_7),(P_{17} or P_{19}) から 3 点であればよいので

$$\frac{4}{{}_{23}C_3}$$

(B)　P_{12} が選ばれないとき

条件より，直径となる対角線は P_1P_{13} または $P_{11}P_{23}$ に直交するものである．このとき，直径の両端はそれぞれ 1 通りに決まり，残りの 1 点も P_{12} でないことから，P_{14} または P_{10} と 1 通りに決まる．よって，このときの確率は

$$\frac{2}{{}_{23}C_3}$$

したがって，求める確率は

$$\frac{4}{{}_{23}C_3}+\frac{2}{{}_{23}C_3}=\frac{6}{{}_{23}C_3}=\frac{6}{23\cdot 11\cdot 7}=\frac{6}{1771}$$

3

(1)

直線 AB 上の点 P を実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}=(-k,\ 0,\ 2k+2)$$

とおく．直線 CD 上の点を S としたとき，実数 l を用いて

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OC}+k\overrightarrow{CD}=(1-l,\ 1-l,\ l)$$

とおく．△PCD が最小となることは，PS が最小となることである．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PS}|^2=&(1-l+k)^2+(1-l)^2+(l-2k-2)^2\\=&3l^2-2(3k+4)l+5k^2+10k+6\\=&3\left(l-\frac{3k+4}{3}\right)^2+2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\end{aligned}$$

よって，PS の最小値は，$k=-\frac{1}{2}$, $l=\frac{5}{6}$ のとき

$$PS=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

である．これより求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot CD\cdot PS=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

補足

$$\overrightarrow{PS}=(1-l+k,\ 1-l,\ l-2k-2),\overrightarrow{AB}=(-1,\ 0,\ 2),\overrightarrow{CD}=(-1,\ -1,\ 1)$$
$$\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{AB}=3l-5k-5,\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{CD}=3l-3k-4$$

となり $\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ であることから

$$k=-\frac{1}{2},\ l=\frac{5}{6}$$

と求めることができる．

(2)

Q の方が x 座標が小さいとして一般性を失わない．

$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(1,1,-1)$ で各成分の大きさが 1 であるから，実数 a を用いて，$\mathrm{Q}(a,a,-a+1)$,$\mathrm{R}(a+1,a+1,-a)$ と置くことができる．

Q と AB 上の点の距離を d_Q とおくと，

$$d_Q{}^2 \geqq \frac{1}{5}\left\{6\left(a-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5}{6}\right\}$$

等号は $b=-\dfrac{3a+2}{5}$ となる b を用いて，$(-b,0,2b+2)$ となる AB 上の点で最小となる．

同様に，R と AB 上の点の距離を d_R とおくと，

$$d_R{}^2 \geqq \frac{1}{5}\left\{6\left(a+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{5}{6}\right\}$$

となり，等号も成立する．

よって，d_Q, d_R の最小値をそれぞれ d_q, d_r とすると

$$d_q+d_r=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\sqrt{6\left(a-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5}{6}}+\sqrt{6\left(a+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{5}{6}}\right\}$$

ここで三角不等式

$$\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+w^2} \geqq \sqrt{(x+y)^2+(z+w)^2}$$

を用いると

$$d_q+d_r \geqq \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\sqrt{6\left(a+\frac{5}{6}-a+\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)^2}\right\}$$

$$d_q+d_r \geqq \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2\sqrt{21}}{3}$$

等号は $a=-\dfrac{1}{3}$ のとき成立する．

AB$=\sqrt{5}$ より，求める最小値は

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2\sqrt{21}}{3}=\frac{\sqrt{21}}{3}$$