2021 年度　早稲田大学　社会科学部　数学　解答例

1

（1）　解と係数の関係から

$$a = -(\alpha + \beta) = -\frac{2\sin\theta}{1 - \cos^2\theta} = -\frac{2}{\sin\theta}$$

$$b = \alpha\beta = \frac{\sin^2\theta}{1 - \cos^2\theta} = 1$$

である。

（2）　$y = f(x)$ の頂点を $(X,\ Y)$ とする。

$$f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

であるから

$$X = -\frac{a}{2}, \qquad Y = b - \frac{a^2}{4}$$

となる。ここで，（1）の結果も用いると

$$X = \frac{1}{\sin\theta}, \qquad Y = 1 - X^2$$

となる。θ が $0 < \theta < \pi$ で変化するとき，X のとり得る値の範囲は $X \geqq 1$ であるから，求める軌跡は，放物線 $y = 1 - x^2$ の $x \geqq 1$ の部分 である。

（3）　$I = \displaystyle\int_0^{2\sin\theta} f(x)dx$ とおくと

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\sin\theta} (x^2 + ax + b)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + bx\right]_0^{2\sin\theta} \\ &= (2\sin\theta)\left(\frac{4}{3}\sin^2\theta + a\sin\theta + b\right) \\ &= (2\sin\theta)\left(\frac{4}{3}\sin^2\theta - 1\right) \end{aligned}$$

であるから，$I = 0$ となる条件は

$$\sin\theta = 0,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。$0 < \theta < \pi$ より，$\theta = \frac{1}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi$ である。

2

（1）　x，y を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。点 D は辺 OA を 1 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = 2x\overrightarrow{\mathrm{OD}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となるが，F は直線 BD 上にあることより

$$2x + y = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

である。同様に点 E は辺 OB を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{2}y\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

となるが，F は直線 AE 上にあることより

$$x + \frac{3}{2}y = 1 \qquad \cdots\cdots ②$$

である。①，②より

$$x = \frac{1}{4},\ y = \frac{1}{2}$$

となるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \underline{\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}}$$

である。

（2）　$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ と（1）の結果より

$$\frac{1}{4}\left|\vec{a}\right|^2 + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\left|\vec{b}\right|^2$$

$$a^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} + 2b^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \underline{-a^2 + 2b^2}$$

である。

（3）　$-ab < \vec{a}\cdot\vec{b} < ab$ と（2）の結果より

$$-ab < -a^2 + 2b^2 < ab$$

$b = 1$ なので

$$-a < 2 - a^2 < a$$

$$a^2 - a - 2 < 0 \quad \text{かつ} \quad a^2 + a - 2 > 0$$

$$(a-2)(a+1) < 0 \quad \text{かつ} \quad (a+2)(a-1) > 0$$

$$-1 < a < 2 \quad \text{かつ} \quad 「a < -2 \quad \text{または} \quad a > 1」$$

となるので，$\underline{1 < a < 2}$ である。

（4）　（2）の結果より

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2 - \left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - (-a^2+2)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-\left(a^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}
\end{aligned}
$$

となるが，a は（3）の範囲を動くので，$a^2 = \dfrac{5}{2}$，つまり，$a = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ のときに，最大値 $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{4}$ をとる。

3

10 進法に直すと $N = 2k^3 + 2k + 1$ である。

（1）　$N = (k-1)(2k^2 + 2k + 4) + 5$ と変形でき，$2k^2 + 2k + 4$ は整数であるから，$(k-1)(2k^2+2k+4)$ は $k-1$ で割り切れる。したがって，N が $k-1$ で割り切れる条件は

$$5 \text{ が } k-1 \text{ で割り切れること}$$

である。よって，$k-1$ が 5 の約数となることが，その条件となるが，$k \geqq 3$ より，$k-1=5$ となる。よって，$k = 6$ である。

（2）　$N = (k+1)(2k^2 - 2k + 3) + k - 2$ と変形でき，$2k^2 - 2k + 3$ は整数であるから，$(k+1)(2k^2-2k+3)$ は $k+1$ で割り切れる。さらに，$0 \leqq k-2 < k+1$ であるから，N を $k+1$ で割ったときの余りは $k-2$ である。

（3）　$N = (k+2)(2k^2 - 4k + 10) - 19$ と変形でき，$2k^2 - 4k + 10$ は整数であるから，$(k+2)(2k^2-4k+10)$ は $k+2$ で割り切れる。したがって，N を $k+2$ で割ったときの余りが 1 となる条件は

$$1-(-19) \text{ が } k+2 \text{ で割り切れること}$$

である。よって，$k+2$ が 20 の約数となることがその条件となるが，$k \geqq 3$ より，$k+2 \geqq 5$ であることに注意すると

$$k+2 = 5,\ 10,\ 20$$

となり，これらを解いて，$k = 3,\ 8,\ 18$ である。