2020 年度　慶應義塾大学　経済学部　数学　解答例

［**1**］

**(1)**

| (1) |
|---|
| 7 |

**(2)**

| (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 9 |

**(3)**

| (7) | (8) | (9) | (10) | (11) | (12) | (13) | (14) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 5 |

[**2**]

**(1)**

| (15) | (16) | (17) | (18) | (19) | (20) | (21) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 2 | 1 | 6 | 3 | 8 |

**(2)**

| (22) | (23) | (24) | (25) |
|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 6 | 6 |

**(3)**

| (26) | (27) | (28) | (29) | (30) | (31) |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 7 | 6 | 7 | 2 | 3 |

[**3**]

**(1)**

| (32) | (33) | (34) | (35) |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 4 | 3 |

**(2)**

| (36) | (37) | (38) | (39) | (40) | (41) | (42) | (43) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |

| (44) | (45) | (46) | (47) | (48) | (49) | (50) | (51) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |

**(3)**

| (52) | (53) | (54) | (55) | (56) | (57) | (58) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 0 | 3 | 3 | 2 | 1 |

［**4**］

**(1)**　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(0,\ 0,\ 1)+k(p,\ q,\ r-1)\\&=(kp,\ kq,\ 1+k(r-1))\end{aligned}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $z$ 成分は $0$ であるから，$1+k(r-1)=0$ である。$r\neq 1$ より $k=\dfrac{1}{1-r}$。すなわち

$$\mathrm{P}\left(\frac{p}{1-r},\ \frac{q}{1-r},\ 0\right)$$

である。同様にして，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{p}{1+r},\ \dfrac{q}{1+r},\ 0\right)$ である。

**(2)**　点 C は原点を中心とする半径 1 の球面上より

$$p^2+q^2+r^2=1\ \cdots\cdots①$$

である。点 C は点 A，B とは異なるので

$$|r|\neq 1\ \cdots\cdots②$$

である。次に

$$線分\ \mathrm{RS}: 2x+4y=1,\ 0\leqq x\leqq\frac{1}{2},\ z=0$$

であり，点 P は線分 RS 上を動くので

$$\begin{cases}\dfrac{2}{1-r}(p+2q)=1\ \cdots\cdots③\\ 0\leqq\dfrac{p}{1-r}\leqq\dfrac{1}{2}\ \cdots\cdots④\end{cases}$$

である。ここで，$\mathrm{Q}(X,\ Y,\ 0)$ とおくと

$$X=\frac{p}{1+r},\ Y=\frac{q}{1+r}$$

$$p=(1+r)X,\ q=(1+r)Y$$

であり，これを ①，②，③，④ に代入して

$$\begin{cases}(1+r)^2(X^2+Y^2)+r^2=1\ \cdots\cdots①'\\ |r|\neq 1\ \cdots\cdots②'\\ \dfrac{2(1+r)}{1-r}(X+2Y)=1\ \cdots\cdots③'\\ 0\leqq\dfrac{(1+r)X}{1-r}\leqq\dfrac{1}{2}\ \cdots\cdots④'\end{cases}$$

である。

　ここで，③′ は

$$\frac{1+r}{1-r}=\frac{1}{2(X+2Y)}$$

$$r=-\frac{2X+4Y-1}{2X+4Y+1}$$

と変形でき，①′，②′，④′ に代入して

$$\begin{cases}\left(1-\dfrac{2X+4Y-1}{2X+4Y+1}\right)^2(X^2+Y^2)+\left(-\dfrac{2X+4Y-1}{2X+4Y+1}\right)^2=1\\ \left|\dfrac{2X+4Y-1}{2X+4Y+1}\right|\neq 1\\ 0\leqq \dfrac{X}{2(X+2Y)}\leqq \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

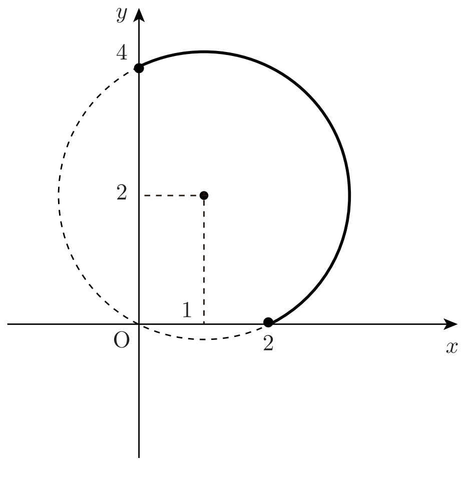
$$\begin{cases}4(X^2+Y^2)+(2X+4Y-1)^2=(2X+4Y+1)^2\\ X\neq 0\text{ または }Y\neq 0\\ 0\leqq X(X+2Y)\leqq (X+2Y)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}X^2+Y^2-2X-4Y=0\\ X\neq 0\text{ または }Y\neq 0\\ 0\leqq X(X+2Y)\text{ かつ }0\leqq Y(X+2Y)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(X-1)^2+(Y-2)^2=5\\ X\neq 0\text{ または }Y\neq 0\\ XY\geqq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(X-1)^2+(Y-2)^2=5\\ X\geqq 0\\ Y\geqq 0\\ X\neq 0\text{ または }Y\neq 0\end{cases}$$

これを図示すると，点 Q の軌跡は次の図の太線部分である。




**(3)**　△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{p^2+q^2}=\sqrt{p^2+q^2}$$

である。

$p=\dfrac{2X}{2X+4Y+1}$，$q=\dfrac{2Y}{2X+4Y+1}$ であり，$2X+4Y=X^2+Y^2$ であるから

$$p=\frac{2X}{1+X^2+Y^2}\ ,\ q=\frac{2Y}{1+X^2+Y^2}$$

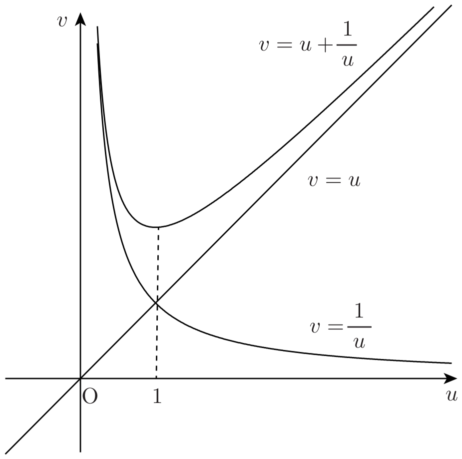
である。さらに $X^2+Y^2=u^2$ $(u>0)$ とおくと

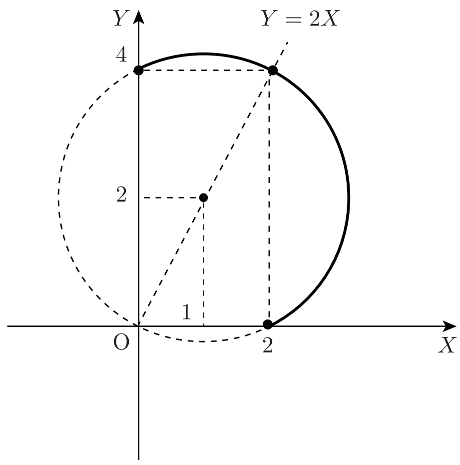
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\sqrt{\frac{4(X^2+Y^2)}{(1+X^2+Y^2)^2}}\\&=2\sqrt{\frac{u^2}{(1+u^2)^2}}\ \cdots\cdots⑤\\&=\frac{2}{u+\dfrac{1}{u}}\end{aligned}$$

が得られる。△ABC の面積の最小値を求めるために，$u+\dfrac{1}{u}$ が最大になるときを考えればよい。ただ，$u>1$ であるから，左下図より $u+\dfrac{1}{u}$ が最大になるのは $u$ が最大になるときである。$u$ が最大になるのは，右下図より

$$u=\sqrt{X^2+Y^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$$

である。




したがって，このとき，△ABC の面積の最小値は，⑤ に $u=\sqrt{20}$ を代入して，$2\sqrt{\dfrac{20}{21^2}}$，すなわち $\dfrac{4\sqrt{5}}{21}$ である。

$\boxed{\text{別解}}$ **(3)** **(2)** が解けなくても，(3) は次のようにして解くことができる。
$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ であるから，△ABC の面積は $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ である。$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(p,\ q,\ r-1)$ であり，$p^2+q^2+r^2=1$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{2-2r}$$

である。同様に $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{2+2r}$ であるから，△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{2+2r}\sqrt{2-2r}=\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\sqrt{1+r}\sqrt{1-r}=\sqrt{1-r^2}$$

である。

この最小値を求めるために，$r^2$ が最大になるときを考える。点 P が線分 RS 上にあるとき，$r$ は負であるため，$r$ が最小になるときを考える。それは，OP の長さが最小になるときである。点 P が線分 RS

上にあることから，$0 \leqq \ell \leqq \dfrac{1}{2}$ を満たす $\ell$ を用いて $\mathrm{P}\left(\ell, \dfrac{1-2\ell}{4}, 0\right)$ と表せて

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 &= \ell^2 + \left(\frac{1-2\ell}{4}\right)^2 \\
&= \frac{20\ell^2 - 4\ell + 1}{16} \\
&= \frac{5}{4}\left(\ell - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{20}
\end{aligned}
$$

である。よって，$\ell = \dfrac{1}{10}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ は最小になる。このとき

$$\frac{p}{1-r} = \ell = \frac{1}{10}$$

より $p = \dfrac{1-r}{10}$ である。同様に $q = \dfrac{1-r}{5}$。したがって，このとき，$p^2+q^2+r^2=1$ より

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1-r}{10}\right)^2 + \left(\frac{1-r}{5}\right)^2 + r^2 = 1 \\
&(r-1)^2 + 4(r-1)^2 + 100r^2 = 100 \\
&21r^2 - 2r - 19 = 0 \\
&(r-1)(21r+19) = 0 \\
&r = -\frac{19}{21}
\end{aligned}
$$

である。以上より，求める最小値は

$$\sqrt{1-r^2} = \sqrt{1 - \left(-\frac{19}{21}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{21}$$

である。

［5］

**(1)**　まず，真数の条件から，$0 < \alpha < 2$ でなければならない。底を 2 にそろえると

$$\frac{\log_2(2-\alpha)}{\log_2 8} + \frac{\log_2(\alpha+1)}{\log_2 64} = \frac{\log_2 \alpha}{\log_2 4}$$

$$\frac{\log_2(2-\alpha)}{3} + \frac{\log_2(\alpha+1)}{6} = \frac{\log_2 \alpha}{2}$$

$$2\log_2(2-\alpha) + \log_2(\alpha+1) = 3\log_2 \alpha$$

$$\log_2(2-\alpha)^2 + \log_2(\alpha+1) = \log_2 \alpha^3$$

$$\log_2(2-\alpha)^2(\alpha+1) = \log_2 \alpha^3$$

$$(2-\alpha)^2(\alpha+1) = \alpha^3$$

よって，$\alpha^2 = \dfrac{4}{3}$ であり，$0 < \alpha < 2$ より $\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ である。

**(2)**　(1) より，点 $(\sqrt{3}\alpha, \alpha^2)$ は $\left(2, \dfrac{4}{3}\right)$ である。よって

$$\frac{x+s}{2} = 2\ , \ \frac{y+t}{2} = \frac{4}{3}$$

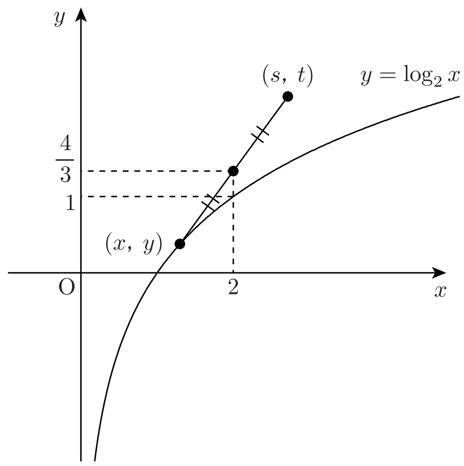
であり，$y = \log_2 x$ より

$$x + s = 4\ , \ \log_2 x + t = \frac{8}{3}$$

である。この 2 式から $x$ を消去すると

$$t = -\log_2(4-s) + \frac{8}{3}$$

である。




**(3)**　三角関数の合成より

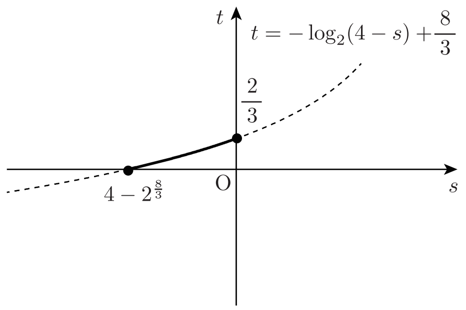
$$3\sin\left(\frac{s+t}{2}\pi\right) + \cos\left(\frac{s+t}{2}\pi\right) = \sqrt{10}\sin\left(\frac{s+t}{2}\pi + \theta\right)$$

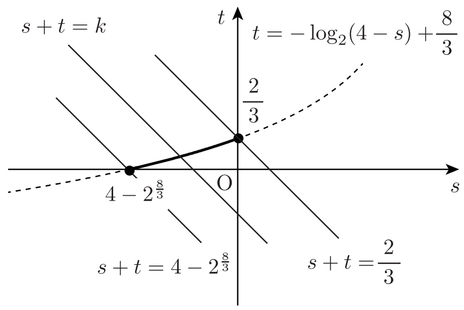
である。ただし，$\theta$ は

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}\ , \ \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}\ , \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

を満たす実数である。

　一方，$st$ 平面上に曲線 $t = -\log_2(4-s) + \dfrac{8}{3}$ の $s \leqq 0$，$t \geqq 0$ の部分を描くと，左下図の太線部分である。この部分と，直線 $s + t = k$ が共有点をもつ $k$ の値の範囲を考えることにより，右下図から $4 - 2^{\frac{8}{3}} \leqq s + t \leqq \dfrac{2}{3}$ である。






すなわち

$$2-2^{\frac{5}{3}} \leqq \frac{s+t}{2} \leqq \frac{1}{3}$$

$$(2-2\cdot\sqrt[3]{4})\pi \leqq \frac{s+t}{2}\pi \leqq \frac{\pi}{3}$$

$$(2-2\cdot\sqrt[3]{4})\pi+\theta \leqq \frac{s+t}{2}\pi+\theta \leqq \frac{\pi}{3}+\theta$$

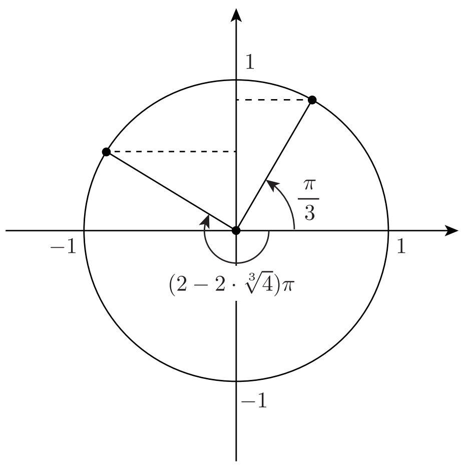
である。$1.5<\sqrt[3]{4}<1.6$ より

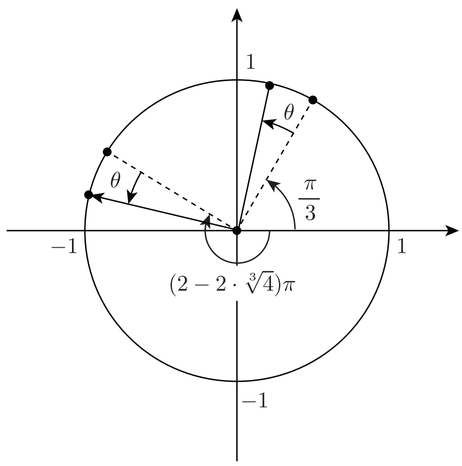
$$-1.2\pi<(2-2\cdot\sqrt[3]{4})\pi<-\pi$$

であり

$$\sin(2-2\cdot\sqrt[3]{4})\pi<\sin(-1.2\pi)<\sin\frac{\pi}{3}$$

である。また，$\theta<\frac{\pi}{6}$ より $\frac{s+t}{2}\pi+\theta<\frac{\pi}{2}$。これらに注意して角 $\frac{s+t}{2}\pi$ の動く範囲を図示すると，左下図のようになり，この図から角 $\frac{s+t}{2}\pi+\theta$ の動く範囲を図示すると，右下図のようになる。






したがって，$\frac{s+t}{2}\pi+\theta=\frac{\pi}{3}+\theta$，すなわち $\frac{s+t}{2}\pi=\frac{\pi}{3}$ のとき，最大値

$$3\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=\underline{\frac{3\sqrt{3}+1}{2}}$$

をとる。

また，$\frac{s+t}{2}+\theta=-\frac{\pi}{2}$ となり得るから，最小値は

$$\sqrt{10}\cdot(-1)=\underline{-\sqrt{10}}$$

である。

［**6**］

**(1)** $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ とおく。まず $f(0)=-a^2$ より $D=-a^2$ である。

次に $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx-a^2$ において $f(a)=0$ から

$$Aa^3+Ba^2+Ca-a^2=0$$

$$Aa^2+Ba+C-a=0$$

$$aB+C=a-Aa^2 \ \cdots\cdots ①$$

である。そして $f'(x)=3Ax^2+2Bx+C$ と $f'(a)=0$ より

$$3Aa^2+2Ba+C=0$$

$$2aB+C=-3Aa^2 \ \cdots\cdots ②$$

である。さらに $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=0$ より

$$\left[\frac{A}{4}x^4+\frac{B}{3}x^3+\frac{C}{2}x^2-a^2x\right]_0^a=0$$

$$\frac{A}{4}a^4+\frac{B}{3}a^3+\frac{C}{2}a^2-a^3=0$$

$$\frac{A}{4}a^2+\frac{B}{3}a+\frac{C}{2}-a=0$$

$$3Aa^2+4Ba+6C-12a=0 \ \cdots\cdots ③$$

である。

①，② から，$B=-1-2Aa$，$C=2a+Aa^2$。③ も用いると

$$A=\frac{4}{a}\ ,\ B=-9\ ,\ C=6a$$

であるから

$$f(x)=\frac{4}{a}x^3-9x^2+6ax-a^2$$

である。

**(2)** $f'(x)=\dfrac{12}{a}x^2-18x+6a$

$\qquad\quad =\dfrac{6}{a}(2x-a)(x-a)$

より方程式 $f'(x)=0$ を解くと $x=\dfrac{a}{2}$，$a$ である。$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $\frac{a}{2}$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

極大値は

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{4}{a}\left(\frac{a}{2}\right)^3-9\left(\frac{a}{2}\right)^2+6a\cdot\frac{a}{2}-a^2=\frac{a^2}{4}$$

である。そして，$f(x)=f\left(\dfrac{a}{2}\right)$ かつ $x \fallingdotseq \dfrac{a}{2}$ となる $x$ の値を求める。

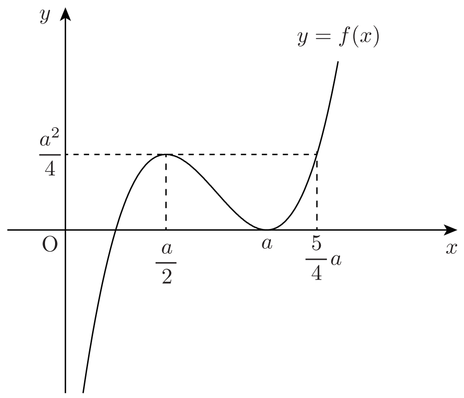
$$\frac{4}{a}x^3-9x^2+6ax-a^2=\frac{a^2}{4}$$

$$16x^3-36ax^2+24a^2x-5a^3=0$$

$$(2x-a)^2(4x-5a)=0$$

$$x=\frac{5}{4}a$$

である。よって，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる。




$\dfrac{a}{2}$ と 1，$\dfrac{5}{4}a$ と 1 の 2 つの大小関係に注意すると，求める最大値は

$$\begin{cases} a \geqq 2 \text{ または } 0<a \leqq \dfrac{4}{5} \text{ のとき} & f(1)=\dfrac{4}{a}-9+6a-a^2 \\ \dfrac{4}{5} \leqq a \leqq 2 \text{ のとき} & f\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^2}{4} \end{cases}$$

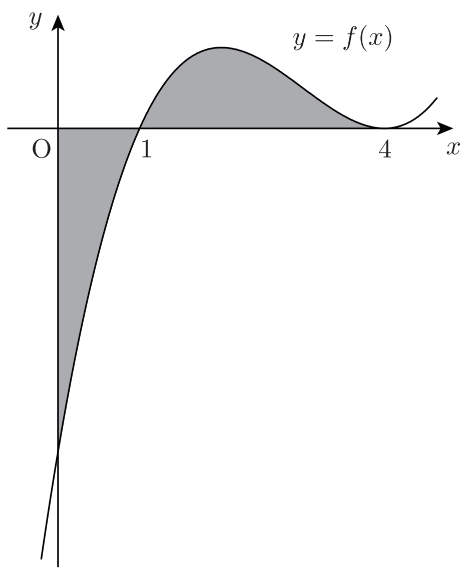
である。

**(3)** $a=4$ のとき，$f(x)=x^3-9x^2+24x-16$ である。方程式 $f(x)=0$ を解くと

$$(x-4)^2(x-1)=0$$

$$x=1,\ 4$$

である。よって，求める面積は図の網掛け部分の面積である。



ゆえに，求める面積を $S$ とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 (-f(x))dx + \int_1^4 f(x)dx \\
&= \int_1^0 (x^3 - 9x^2 + 24x - 16)dx + \int_1^4 (x^3 - 9x^2 + 24x - 16)dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 - 16x\right]_1^0 + \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 - 16x\right]_1^4 \\
&= \frac{4^4}{4} - 3 \cdot 4^3 + 12 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 - 2\left(\frac{1}{4} - 3 + 12 - 16\right) \\
&= \frac{27}{2}
\end{aligned}
$$

である。