2020年度 慶應義塾大学 医学部 数学 解答例

[I] (1) (あ) $-\dfrac{a}{b}$ (い) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$

(2) (う) e^2 (え) 4 (お) $\dfrac{8}{3}\pi$

(3) (か) $\dfrac{3+4i}{2}$ (き) $-\dfrac{3+4i}{2}$

(く) $\dfrac{5}{2}$ (け) $-\dfrac{6-8i}{25}$

(こ) $\dfrac{-7+i}{25}$ (さ) $\dfrac{1+7i}{25}$

[II] (1) (あ) $4(n-1)$ (い) n^2

(2) (う) $4(n-2)$ (え) $n(n-1)$

(3) (お) $4(2n-3)(n-2)(n-3)$

(か) $n^2(n-1)^2$

(4) (き) $2(2n-1)$ (く) $3n(n-1)$

(5) (け) $(n+1)(n-2)$ (こ) $6n(n-1)$

[Ⅲ]　(1)　(あ)　4

(2)　(い)　2　　(う)　10　　(え)　42

(お)　$4S_n + 2$　または　$S_n + 2 \cdot 4^n$

など

(か)　$\frac{2}{3}(4^n - 1)$

(き)　$\frac{2}{3} \cdot 4^n - 2^n + \frac{1}{3}$

(く)　$\frac{\pi^2}{6}$

[IV] (1) (あ) $\dfrac{3A}{2\sqrt{C}}$

(2) (い) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}A$ (う) $\sqrt{\left(1-\dfrac{2C^2}{9A^2}\right)C}$

(え) $\sqrt{\left(1-\dfrac{C^2}{9A^2}\right)C}$

(3) (お) $\sqrt{3}A$ (か) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(4) $$L(C)=\int_0^{\sqrt{C}}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

ここで与えられた不等式より，$0 \leqq x \leqq \sqrt{C}$ において

$$1 \leqq \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} \leqq 1+|f'(x)| \quad \text{——①}$$

$$|f'(x)| \leqq \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} \leqq 1+|f'(x)| \quad \text{——②}$$

が成り立つ。$0 \leqq x \leqq \sqrt{C}$ において $f'(x) \leqq 0$ に注意して，① より

$$\int_0^{\sqrt{C}}dx \leqq L(C) \leqq \int_0^{\sqrt{C}}\{1-f'(x)\}\,dx$$

$$\sqrt{C} \leqq L(C) \leqq \sqrt{C}-f(\sqrt{C})+f(0)$$

ここで，$f(\sqrt{C})=0$ と (1) より，$f(0)=b=\dfrac{3A}{2\sqrt{C}}$ なので

$$\sqrt{C} \leqq L(C) \leqq \sqrt{C}+\frac{3A}{2\sqrt{C}}$$

となり，

$$1 \leqq \frac{L(c)}{\sqrt{c}} \leqq 1 + \frac{3A}{2c}$$

が成り立つ。$\lim_{c \to \infty} \left(1 + \frac{3A}{2c}\right) = 1$ より，はさみうちの原理より

$$\lim_{c \to \infty} \frac{L(c)}{\sqrt{c}} = 1$$

となる。同様に ② より

$$-f(\sqrt{c}) + f(0) \leqq L(c) \leqq \sqrt{c} - f(\sqrt{c}) + f(0)$$

$$\frac{3A}{2\sqrt{c}} \leqq L(c) \leqq \sqrt{c} + \frac{3A}{2\sqrt{c}}$$

$$\frac{3A}{2} \leqq \sqrt{c}\, L(c) \leqq c + \frac{3A}{2}$$

が成り立つ。$\lim_{c \to +0} \left(c + \frac{3A}{2}\right) = \frac{3A}{2}$ より，はさみうちの原理より

$$\lim_{c \to +0} \sqrt{c}\, L(c) = \frac{3A}{2}$$

となり，示された。▨