1 (ア) 92　(イ) 4

(2)　(i) $P_n : a_1 \leqq a_n \leqq 2$ とおく．$a_1 \leqq 2$ の下で，全ての自然数 n に対して命題 P_n が真であることを示す．まず $P_1 : a_1 \leqq a_1 \leqq 2$ は真．次に，P_k (k : 自然数) が真であると仮定すると $a_1 \leqq a_k \leqq 2$ が成立．このとき $a_k \leqq 2$ が成立するので

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}a_k \leqq f(a_k) \leqq 2 - a_k \qquad \cdots\cdots ①$$

が成立．よって

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + f(a_k) \\ &\leqq a_k + (2 - a_k) \qquad (\quad 式①) \\ &= 2, \\ a_{k+1} &= a_k + f(a_k) \\ &\geqq a_k + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}a_k\right) \qquad (\quad ①) \\ &\geqq a_1 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\cdot 2\right) \qquad (\quad 仮定より\ a_k \leqq 2) \\ &= a_1 \end{aligned}$$

となって P_{k+1} も真となる．以上より，全ての自然数 n に対して P_n が真であることが示された．

(ii) 前問 (i) の結果から，全ての自然数 n に対して $a_n \leqq 2$ ゆえ

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_n \leqq f(a_n) \leqq 2-a_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成立．これより

$$\begin{aligned} 0 \leqq 2-a_{n+1} &= 2-a_n-f(a_n) \\ &\leqq 2-a_n-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_n\right) \qquad (\because ②) \\ &= \frac{2}{3}(2-a_n) \end{aligned}$$

を得る．よって

$$0 \leqq 2-a_n \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(2-a_1) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を得るので，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}(2-a_n)=0, \quad \therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\{2-(2-a_n)\} = 2-0=2$$

が示される．

2

(ウ) $\frac{5}{12}$

(エ) $\frac{3}{5}$

(オ) $\frac{8}{11}$

(カ) $\frac{1}{4}$

(キ) $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

3　(ア) $I-4a$

(イ) $\dfrac{f(t)}{t}$

(コ) $\dfrac{5-t^2}{t}$

(サ) -2

(シ) $\dfrac{f(\sqrt{5})}{\sqrt{5}}$

(2) 方程式 $g(x)=0$ が $1<x<3$ の範囲に実数解をただ 1 つ持つことを証明すればよい．
まず，$\dfrac{f(3)}{3}<a<f(1)$ のとき，$g(1)=f(1)-a>0$ および $g(3)=f(3)-3a<0$ が成立する．加えて $g(x)$ は単調減少な連続関数である．よって中間値の定理から，$g(\alpha)=0$ なる実数 α が $1<\alpha<3$ の範囲にただ一つ存在する．

($g(x)=f(x)-ax$ とおいた。)

(4) まず $t_0 \leqq x \leqq 3$ のとき，$f(x)$ は単調減少であることから $t_0 \leqq s \leqq x$ に対して $f(t_0) \geqq f(s) \geqq f(x)$ となる．よって

$$F(x)-F(t_0)=\int_{t_0}^{x} f(s)\,ds \geqq \int_{t_0}^{x} f(x)\,ds=(x-t_0)f(x).$$

また $1 \leqq x \leqq t_0$ のときは，$x \leqq s \leqq t_0$ に対して $f(x) \geqq f(s) \geqq f(t_0)$ となるので

$$F(x)-F(t_0)=-\int_{x}^{t_0} f(s)\,ds \geqq -\int_{x}^{t_0} f(x)\,ds=(x-t_0)f(x).$$

以上より，$1 \leqq x \leqq 3$ なる全ての実数 x に対して

$$F(x)-F(t_0) \geqq (x-t_0)f(x)$$

が示された．

4　(ス) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(セ) $-\frac{4}{3}$

(ソ) $\frac{1}{3}$

(タ) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(チ) -1

(ツ) $\frac{\sqrt{2t^2-2t+1}}{2}$

(テ) $\frac{1}{3}$

5 (ト) $2\pi r$

(ナ) $(1-r)(\cos t+i\sin t)$

(ニ) $r\left\{\cos\left(\dfrac{r-1}{r}t\right)+i\sin\left(\dfrac{r-1}{r}t\right)\right\}$

(ヌ) $8r(1-r)$

(ネ) $\dfrac{4(1-r)}{\pi}$