2021 年度　慶應義塾大学　経済学部　数学　解答例

[**1**]

(1)

(1)	(2)
1	3

(2)

(3)	(4)	(5)	(6)
4	8	−	3

(3)

(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
1	9	8	1	9	5	2

(4)

(14)	(15)	(16)
2	4	7

[**2**]

(1)

(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)	(27)
6	7	9	9	3	5	7	1	2	3	1

(2)

(28)	(29)	(30)
8	4	8

(3)

(31)	(32)
4	9

[**3**]

(1)

(33)	(34)	(35)	(36)	(37)	(38)
1	4	4	0	1	0

(2)

(39)	(40)	(41)	(42)	(43)	(44)	(45)	(46)	(47)	(48)
2	1	3	4	1	2	0	1	2	6

(3)

(49)	(50)	(51)	(52)	(53)	(54)	(55)
6	0	1	2	1	1	2

[4]

(1)　真数条件より

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad 6x > 5^k \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

となる。この下で，与えられた不等式を変形し

$$\begin{aligned} 2\log_5 x - \log_5(6x - 5^k) &< k - 1 \\ \log_5 \frac{x^2}{6x - 5^k} &< k - 1 \\ \frac{x^2}{6x - 5^k} &< 5^{k-1} \\ x^2 - 6 \cdot 5^{k-1}x + 5^k \cdot 5^{k-1} &< 0 \\ (x - 5^{k-1})(x - 5^k) &< 0 \end{aligned}$$

となり，$5^{k-1} < x < 5^k$ を得る。これは①を満たす。よって，$(\star)$ を満たす x の値の範囲は，$\underline{5^{k-1} < x < 5^k}$ となる。

(2)　$(\star)$ を満たす x のうち奇数を列挙すると

$$5^{k-1} + 2,\ 5^{k-1} + 4,\ 5^{k-1} + 6,\ \cdots,\ 5^{k-1} + 4 \cdot 5^{k-1} - 2$$

であるが，これらは

$$5^{k-1} + 2 \cdot 1,\ 5^{k-1} + 2 \cdot 2,\ 5^{k-1} + 2 \cdot 3,\ \cdots,\ 5^{k-1} + \left\{2 \cdot (2 \cdot 5^{k-1} - 1)\right\}$$

と書きなおせるので

$$a_k = \underline{2 \cdot 5^{k-1} - 1}$$

となる。また

$$S_n = 2 \cdot \frac{5^n - 1}{5 - 1} - n = \underline{\frac{5^n - 1}{2} - n}$$

となる。

(3)　a_k は整数であるから，その和である S_n も整数であり，$S_n + n$ も整数である。

また，$S_n + n + \frac{1}{2}$ の整数部分は $S_n + n$ に一致することから，$S_n + n + \frac{1}{2}$ の整数部分の桁数は $S_n + n$ の桁数に一致する。ここで

$$S_n + n + \frac{1}{2} = \frac{5^n}{2}$$

であるから，数列 $\left\{S_n + n + \frac{1}{2}\right\}$ は単調に増加する数列である。

$$\log_{10}\left(S_n + n + \frac{1}{2}\right) = \log_{10}\frac{5^n}{2} = n - (n+1)\log_{10} 2$$

であるから，$0.30 < \log_{10} 2 < 0.31$ を用いると

$$n - 0.31(n+1) < \log_{10}\left(S_n + n + \frac{1}{2}\right) < n - 0.30(n+1) \quad \cdots\cdots①$$

となる。
$S_n + n + \dfrac{1}{2}$ の整数部分が 10 桁となるとき

$$10^9 < S_n + n + \frac{1}{2} < 10^{10}$$

$$9 < \log_{10}\left(S_n + n + \frac{1}{2}\right) < 10 \quad \cdots\cdots②$$

が成り立つ。
ここで

n	13	14	15
$n-0.31(n+1)$		9.35	10.04
$n-0.30(n+1)$	8.80	9.50	

であるから，①，②より，$S_n + n$ が 10 桁の整数となる自然数は $n = 14$ である。

[**5**]

(1)　2 点A，B は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する平面上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

が成り立つ。これより

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=0$$

となり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=2$ であることも用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\underset{\sim}{4}$$

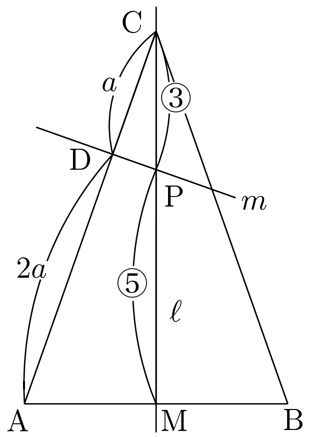
である。

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=2a$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=3a$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2a^2$ より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=9a^2$$

が成り立つので，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|$ となる。よって，三角形 ABC は AC = BC の二等辺三角形である。したがって，線分 AB の中点を M とおくと，直線 CM が ℓ である。

　さらに，線分 AC を 2 : 1 に内分する点を D とすると，三角形 AMC と三角形 PDC が相似である。



$$\mathrm{CD}=\frac{1}{3}\mathrm{CA}=a,\ \mathrm{CM}^2=\mathrm{AC}^2-\mathrm{AM}^2=8a^2$$

を用いると

$$\frac{CP}{CM}=\frac{\dfrac{CD}{CM}\cdot CA}{CM}=\frac{CD\cdot CA}{CM^2}=\frac{3}{8}$$

代々木ゼミナール

となるので，点 P は線分 CM を 3 : 5 に内分する点である。よって

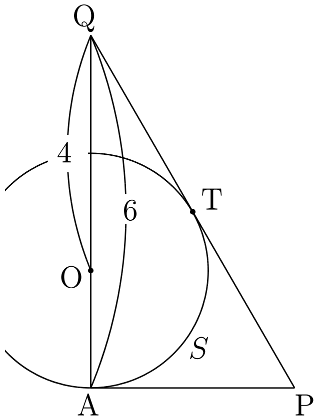
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{3}{16}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{16}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となることから，$\alpha = \beta = \dfrac{3}{16}$，$\gamma = \dfrac{5}{8}$ である。

(3)　直線 PQ と球 S の接点を T とおくと，$\mathrm{OQ} : \mathrm{OT} = 2 : 1$，$\angle\mathrm{OTQ} = 90^\circ$ より，$\angle\mathrm{OQT} = 30^\circ$ である。よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = 6\tan 30^\circ = 2\sqrt{3}$$

となる。



さらに，三角形 APD は AP を斜辺とする直角三角形であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|^2$$

$$(2\sqrt{3})^2 = (2a)^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

$$a = \sqrt{\frac{32}{11}} = \frac{4\sqrt{22}}{11}$$

となる。

R も平面 H 上にあるため，同様にすることで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AR}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$ となるから，点 R は線分 AB に関して点 P と対称な点である。よって

$$\triangle\mathrm{APR} = 2\triangle\mathrm{APM} = 2 \times \triangle\mathrm{AMC} \times \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{PM}} = 2 \times \sqrt{2}a^2 \times \frac{5}{8} = \frac{40\sqrt{2}}{11}$$

である。

[**6**]

(1)　A が C と L_α の接点であり，B が C と L_α の共有点であるから，$G(x)$ は $(x-\alpha)^2$ と $(x-\beta)$ を因数にもつ。また，$\ell_\alpha(x)$ は高々 1 次式であるから，$G(x)$ は 3 次式であり，x^3 の項の係数は 1 である。したがって

$$G(x) = \underline{(x-\alpha)^2(x-\beta)}$$

である。また，曲線 $y=G(x)$ の上の点 $(\beta,\ G(\beta))$ における接線の方程式が $y=m(x)$ であるから

$$m(x) = G'(\beta)(x-\beta)+G(\beta)$$

となる。ここで，与えられた導関数の公式より

$$G'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)^2$$

であるから，$G'(\beta)=(\beta-\alpha)^2$ となり，さらに，$G(\beta)=0$ であることも用いて

$$m(x) = \underline{(\beta-\alpha)^2(x-\beta)}$$

となる。

(2)　L_β は，B における C の接線であるから，その方程式は

$$y = F'(\beta)(x-\beta)+F(\beta)$$

である。ここで，$F(x)=G(x)+\ell_\alpha(x)$ であるから

$$F(\beta) = G(\beta)+\ell_\alpha(\beta) = \ell_\alpha(\beta)$$
$$F'(\beta) = G'(\beta)+\ell'_\alpha(\beta) = (\beta-\alpha)^2+\ell'_\alpha(\beta)$$

となるので，これを L_β の方程式へ代入すると

$$\begin{aligned} y &= \left\{(\beta-\alpha)^2+\ell'_\alpha(\beta)\right\}(x-\beta)+\ell_\alpha(\beta) \\ &= m(x)+\ell'_\alpha(\beta)(x-\beta)+\ell_\alpha(\beta) \end{aligned}$$

となる。さて，$\ell_\alpha(x)$ は x の 1 次式であるから，$\ell'_\alpha(x)$ は定数であり，L_α の傾きに一致する。よって，L_α 上に点 B が存在することに注意すると，L_α の方程式は

$$y = \ell'_\alpha(\beta)(x-\beta)+\ell_\alpha(\beta)$$

となる。y 軸に平行でない直線の方程式を y について解くと，1 通りに定まることから，この式の右辺は $\ell_\alpha(x)$ に他ならない。よって，L_β の方程式は

$$y = m(x)+\ell_\alpha(x)$$

となる。（証明終わり）

また，**(1)** の $G(x)$ の導出のときと同様に考えることで

$$F(x)-\ell_\alpha(x)-m(x) = (x-\beta)^2(x-\gamma)$$

となるが，**(1)** より

$$(x-\alpha)^2(x-\beta)-(\beta-\alpha)^2(x-\beta)=(x-\beta)^2(x-\gamma)$$
$$(x-\beta)(x+\beta-2\alpha)(x-\beta)=(x-\beta)^2(x-\gamma)$$

と変形でき，$\beta \neq \gamma$ なので

$$\gamma=2\alpha-\beta$$

となる。

(3)　$\beta-\gamma=2(\beta-\alpha)>0$ であるから，$\gamma<\beta$ となる。よって，与えられた公式を用いることで

$$S=\left|\int_\gamma^\beta (x-\gamma)(x-\beta)^2dx\right|=\frac{1}{12}(\beta-\gamma)^4=\frac{4}{3}(\beta-\alpha)^4$$

となる。$-1<\alpha<0$，$1<\beta<2$ であるから，$\beta-\alpha$ の取り得る値の範囲は

$$1<\beta-\alpha<3$$

であり，S の取り得る値の範囲は

$$\frac{4}{3}<S<108$$

となる。

【注】　**(3)** の S の取り得る値の範囲について，上記の解答は α と β を互いに独立に定めてから $F(x)$，S が構成されるという想定で求めている。

一方，関数 $F(x)$ を 1 つ定め，その $F(x)$ に対して α，β が定まると解釈すると，2 点 $(\alpha,\ F(\alpha))$，$(\beta,\ F(\beta))$ は同一直線上の点であるから，α と β は独立に動かすことはできず，$-1<\alpha<0$ かつ $1<\beta<2$ を満たすような $F(x)$ を構成することができない。その概略を以下に示す。

p，q，r を実数とし，$F(x)=x^3+px^2+qx+r$ とおく。

C 上の点 $(\alpha,\ F(\alpha))$ における接線の方程式は

$$y=(3\alpha^2+2p\alpha+q)x-2\alpha^3-p\alpha^2+r$$

である。

これと $y=F(x)$ との交点の x 座標 を求めると

$$x=\alpha,\ -2\alpha-p$$

となるので，$\beta=-2\alpha-p$ である。

α が $-1<\alpha<0$ を満たすとき，$-p<\beta<2-p$ となり，これが $1<\beta<2$ に一致するような p は存在しない。

ゆえに，$-1<\alpha<0$ かつ $1<\beta<2$ を満たす $F(x)$ を構成することができない。

代々木ゼミナール