

2026 早稲田大学 基幹・創造・先進理工学部 数学 解答例

[I] (1) $t = 2^x$ として, 関数

$$g(t) = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + \frac{63}{4}t - \frac{57}{8}$$

を考える。ただし, 定義域は $t > 0$ とする。

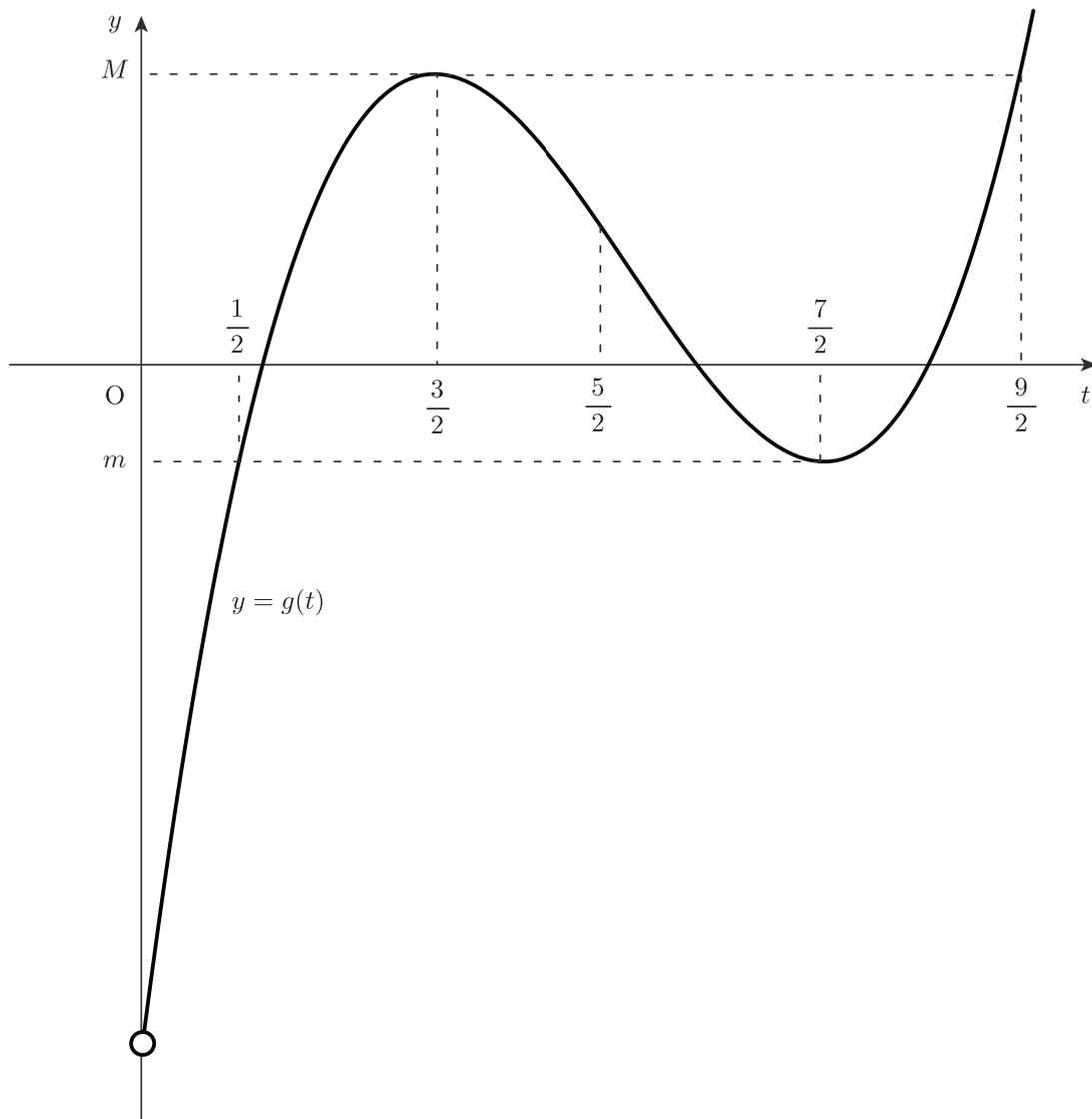
$$g'(t) = 3t^2 - 15t + \frac{63}{4} = \frac{3}{4}(2t - 3)(2t - 7)$$

であるから, $g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	(0)	...	$\frac{3}{2}$...	$\frac{7}{2}$...
$g'(t)$		+	0	-	0	+
$g(t)$		↗	3	↘	-1	↗

この表から, $g(t)$ は極大値 3, 極小値 -1 をとる。 $t = 2^x$ であるから, x が全実数の範囲で増加するとき, t は正の実数の範囲で増加する。すなわち, $f(x)$ の極大値は $g(t)$ の極大値, $f(x)$ の極小値は $g(t)$ の極小値であるから, $M = 3$, $m = -1$ である。

(2) $g''(t) = 6t - 15$ であるから, $y = g(t)$ のグラフの変曲点の t 座標は $\frac{5}{2}$ である。さらに, $g\left(\frac{1}{2}\right) = m$, $g\left(\frac{9}{2}\right) = M$ となることに注意する。これらを踏まえて, $y = g(t)$ のグラフをかくと, 次のようになる。

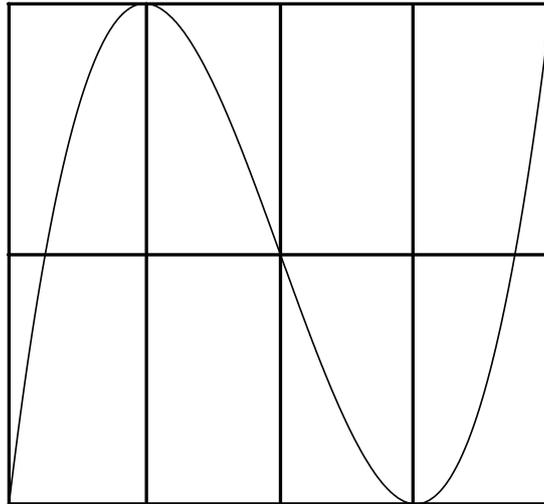


$a \leq x \leq b$ より $2^a \leq t \leq 2^b$ である。この範囲における最大値が M 、最小値が m となるような a, b のうち、 $b - a$ が最小になる a, b の値の候補と、それぞれの $b - a$ の値は次の表にまとめられる。

2^a	2^b	a	b	$b - a$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\log_2 \frac{1}{2}$	$\log_2 \frac{3}{2}$	$\log_2 3$
$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\log_2 \frac{3}{2}$	$\log_2 \frac{7}{2}$	$\log_2 \frac{7}{3}$
$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\log_2 \frac{7}{2}$	$\log_2 \frac{9}{2}$	$\log_2 \frac{9}{7}$

ゆえに、 $b - a$ の最小値は $\log_2 \frac{9}{7}$ であり、 $(a, b) = (\log_2 7 - 1, \log_2 9 - 1)$ である。

((注)) 極値をもつ3次関数のグラフは、次の図のように、8個の合同な長方形に収まることを用いた。



[II] (1) $\sqrt{m - \sqrt{n}} + \sqrt{m + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{mn}}{k}$ の両辺を 2 乗すると

$$(m - \sqrt{n}) + (m + \sqrt{n}) + 2\sqrt{m^2 - n} = \frac{mn}{k^2}$$

$$m(n - 2k^2) = 2k^2\sqrt{m^2 - n} \dots\dots ①$$

が成り立つ。① の右辺は 0 以上であるから、左辺も 0 以上である。よって、 $n \geq 2k^2$ が示された。

① の両辺を 2 乗すると

$$m^2(n - 2k^2)^2 = 4k^4(m^2 - n)$$

$$m^2(n^2 - 4nk^2) = -4k^4n$$

$$m^2(4k^2 - n) = 4k^4 \dots\dots ②$$

が得られる。② の右辺は正であるから、左辺も正である。よって、 $n < 4k^2$ が示された。

(2) $n = 4k^2 - 1$ として、② に代入すると $m = 2k^2$ である。① より、 $m^2 \geq n$ でなければならないが、 $n = 4k^2 - 1$ 、 $m = 2k^2$ はこれを満たす。よって、それぞれの k に対して、自然数解は少なくとも 1 組存在する。

(1) により、 $2k^2 \leq n \leq 4k^2 - 1$ であるから

$$1 \leq 4k^2 - n \leq 2k^2$$

$$1 \leq \sqrt{4k^2 - n} \leq \sqrt{2}k$$

である。再び ② に着目すると $4k^2 - n$ は平方数である。つまり、 $\sqrt{4k^2 - n}$ は整数である。よって、 $\sqrt{4k^2 - n}$ の値は $\sqrt{2}k$ 未満の整数である。ゆえに、自然数解の個数も $\sqrt{2}k$ より小さいことが示された。

(3) $k = 3$ を ② に代入すると

$$m^2(36 - n) = 18^2$$

であり、 $36 - n$ は平方数である。また、(1) により $18 \leq n < 36$ であるから、 $0 < 36 - n \leq 18$ が成り立つ。ゆえに、 $36 - n$ の値の候補は

$$36 - n = 1, 4, 9, 16$$

である。しかし、 $36 - n = 16$ のとき m が整数にならない。これを踏まえて、次の表がかけらる。

m^2	$36 - n$	m	n
18^2	1	18	35
9^2	4	9	32
6^2	9	6	27

これらは $m^2 \geq n$ も満たす。ゆえに

$$(m, n) = (18, 35), (9, 32), (6, 27)$$

である。

【Ⅲ】 (1) 直線 l 上の点 (x, y, z) は

$$l: x = 0 \text{ かつ } y + z = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす。点 Q は 3 点 A, B, P が定める平面上にあるので、実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{AQ} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AP}$$

と表せる。したがって

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AP}$$

ここで $\overrightarrow{OA} = (0, 0, 1)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{AP} = (a, 0, -1)$ であるから

$$\overrightarrow{OQ} = (0, 0, 1) + s(1, 1, -1) + t(a, 0, -1) = (s + at, s, -s - t + 1)$$

と表せる。点 Q は直線 l 上の点であるから①を満たすので

$$\begin{cases} s + at = 0 \\ s + (-s - t + 1) = 2 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} t = -1 \\ s = a \end{cases}$$

以上より、 $\overrightarrow{OQ} = (0, a, 2 - a)$ となるから、 $Q(0, a, 2 - a)$ である。

(2) まず、線分 AB と PQ が交わる条件を考える。 AB 上の点 M , PQ 上の点 N は

$$\overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB} \quad (0 < u < 1), \quad \overrightarrow{PN} = v\overrightarrow{PQ} \quad (0 < v < 1)$$

と書ける。このとき

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{AB} = (0, 0, 1) + u(1, 1, -1) = (u, u, 1 - u) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP} + v\overrightarrow{PQ} = (a, 0, 0) + v(-a, a, 2 - a) = ((1 - v)a, va, (2 - a)v) \quad \dots \textcircled{3}$$

線分 AB と 線分 PQ が交わるのは、 $M = N$, すなわち $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$ のときである。つまり②, ③をともに満たす実数 u, v が $0 < u < 1$, $0 < v < 1$ の範囲に存在する場合である。

$$\begin{cases} u = (1 - v)a \\ u = va \\ 1 - u = (2 - a)v \end{cases}$$

であり、一番目と二番目の式より

$$(1 - 2v)a = 0$$

が得られるので、 $a = 0$ または $v = \frac{1}{2}$ であることが必要である。

(i) $a = 0$ のとき

$$P(0, 0, 0), \quad A(0, 0, 1), \quad Q(0, 0, 2)$$

はすべて z 軸上にあるので、四角形 APBQ はできない。

(ii) $v = \frac{1}{2}$ のとき

$$u = \frac{1}{2}a$$

であり、これは三番目の関係式

$$1 - u = (2 - a)v$$

を満たす。AB と PQ が交わるための条件 $0 < u < 1$ より

$$0 < \frac{a}{2} < 1 \iff \underline{\underline{0 < a < 2}}$$

このとき、4 頂点 A, B, P, Q のうち任意の 3 点が同一直線上に並ぶことはなく、四角形 APBQ が成立する。

(3) (2) より、AB と PQ の交点を M とすると

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ}$$

より M は PQ の中点である。よって、点 P から直線 AB に下ろした垂線と点 Q から直線 AB に下ろした垂線の長さは等しい。したがって、三角形 ABP の面積と三角形 ABQ の面積は等しいので、四角形 APBQ の面積は三角形 ABP の面積の 2 倍である。ここで

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = a + 1, \quad |\overrightarrow{AB}|^2 = 3, \quad |\overrightarrow{AP}|^2 = a^2 + 1$$

よって、四角形 APBQ の面積は

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AP}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP})^2} &= \sqrt{3(a^2 + 1) - (a + 1)^2} \\ &= \sqrt{2a^2 - 2a + 2} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{2(a^2 - a + 1)}}} \end{aligned}$$

である。

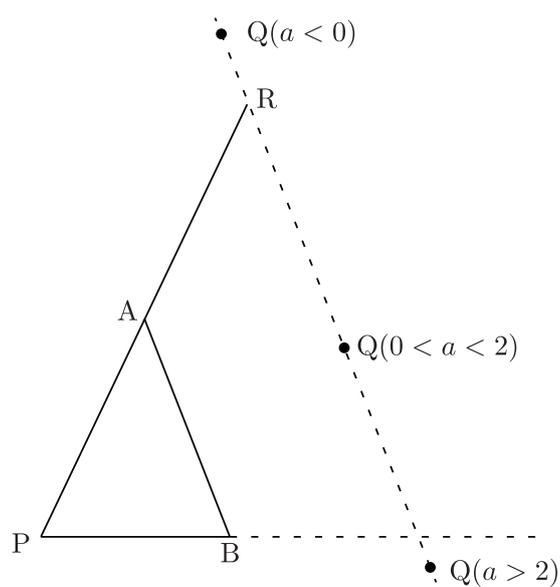
((注)) (2) は次のように図形的に考察することもできる。(1) により

$$\overrightarrow{AQ} = a\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}$$

であり、 $-\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AR}$ により、点 R を定義すると

$$\overrightarrow{AQ} = a\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AR}$$

である。よって、次の図がかける。



[IV] (1) $a(2n+1) = a(2n) + 1$ などを用いて, 具体的に計算すると次の表になる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a(n)$	2	7	8	22	23	25	26	67	68

よって, $a(7) = \underline{26}$, $a(9) = \underline{68}$ である。

(2) $a(2^n) = c_n$ とおく。 $c_1 = a(2) = 7$ であり

$$a(2^{n+1}) = 3a(2^n) + 1$$

$$c_{n+1} = 3c_n + 1$$

$$c_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(c_n + \frac{1}{2}\right)$$

$$c_n + \frac{1}{2} = 3^{n-1}\left(7 + \frac{1}{2}\right)$$

$$c_n = \frac{5 \cdot 3^n - 1}{2}$$

$$a(2^n) = \frac{5 \cdot 3^n - 1}{2}$$

である。さらに, $a(2^n + 1) = a(2^n) + 1$ より

$$\begin{aligned} a(2^n + 1) &= \frac{5 \cdot 3^n + 1}{2} \\ &= \frac{(2+3) \cdot 3^n + 1}{2} \\ &= 3^n + \frac{3^{n+1} + 1}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。一方

$$\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

であるから, $n \geq 2$ のとき

$$a(2^n + 1) = 3^n + \left(1 + \sum_{k=0}^n 3^k\right) = 2 \cdot 3^n + 2 \cdot 3^0 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k$$

である。ゆえに, $b_0 = b_n = \underline{2}$ であり

$$b_j = \underline{1} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

である。これは $n = 1$ のときも矛盾しない。

(3) 各自然数 j に対して, $S_j = a(2^{j-1}) + \dots + a(2^j - 1)$ と定義する。まず

$$S_1 = a(1) = 2$$

である。さらに、 $j \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 S_j &= \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} a(k) \\
 &= \sum_{k=2^{j-2}}^{2^{j-1}-1} \{a(2k) + a(2k+1)\} \\
 &= \sum_{k=2^{j-2}}^{2^{j-1}-1} (3a(k) + 1 + 3a(k) + 2) \\
 &= \sum_{k=2^{j-2}}^{2^{j-1}-1} (6a(k) + 3) \\
 &= 6 \sum_{k=2^{j-2}}^{2^{j-1}-1} a(k) + 3 \cdot 2^{j-2} \\
 &= 6S_{j-1} + 3 \cdot 2^{j-2}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。両辺を 2^j で割ると

$$\begin{aligned}
 \frac{S_j}{2^j} &= 3 \cdot \frac{S_{j-1}}{2^{j-1}} + \frac{3}{4} \\
 \frac{S_j}{2^j} + \frac{3}{8} &= 3 \left(\frac{S_{j-1}}{2^{j-1}} + \frac{3}{8} \right) \\
 \frac{S_j}{2^j} + \frac{3}{8} &= 3^{j-1} \left(\frac{S_1}{2^1} + \frac{3}{8} \right) \\
 S_j &= \frac{11}{4} \cdot 6^{j-1} - \frac{3}{4} \cdot 2^{j-1}
 \end{aligned}$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{2^n-1} a(k) &= \sum_{j=1}^n S_j \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{11}{4} \cdot 6^{j-1} - \frac{3}{4} \cdot 2^{j-1} \right) \\
 &= \frac{11}{4} \cdot \frac{6^n - 1}{5} - \frac{3}{4} \cdot (2^n - 1) \\
 &= \frac{11 \cdot 6^n - 15 \cdot 2^n + 4}{20}
 \end{aligned}$$

である。

((注)) (2) では、 $a(2^n)$ を 3 進法表示することにより、解くこともできる。

$a(1) = 2_{(3)}$, $a(2^1) = 21_{(3)}$, $a(2^2) = 211_{(3)}$ である。帰納的に

$$a(2^n) = 211 \cdots 11_{(3)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

であることが示せる。ただし、この数は $(n+1)$ 桁であり、最高位の数字以外は 1 である。
よって

$$a(2^n + 1) = 211 \cdots 12_{(3)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が得られる。各 b_j は各位の数字を表している。

[V] (1) $f(x) = x \log x$ について、定義域は $x > 0$ である。

$$f'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

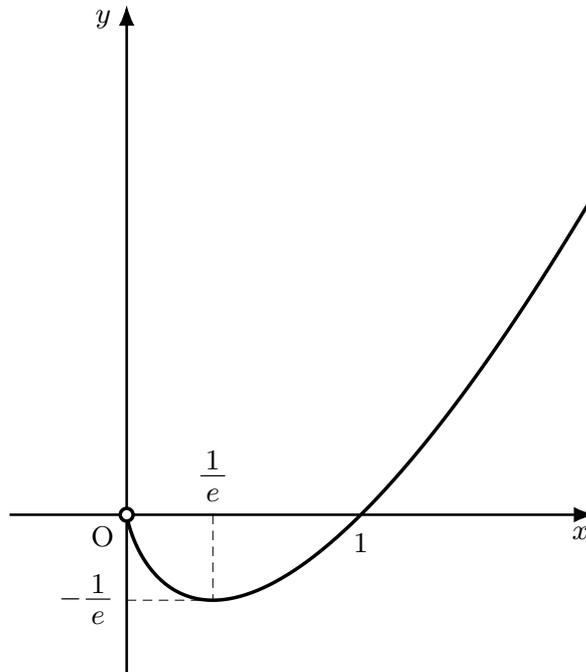
$f'(x) = 0$ とすると $\log x = -1$ より $x = \frac{1}{e}$ である。したがって、関数 $y = f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	(0)	...	$\frac{1}{e}$...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	(0)	\searrow	$-\frac{1}{e}$	\nearrow

また、 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ より

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

であるから、グラフの概形は次のようになる。



(2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ の共有点の個数は、方程式 $f(x) - g(x) = 0$ の異なる実数解の個数に等しい。ここで

$$h(x) = f(x) - g(x) = x \log x - ax + 1 \quad (x > 0)$$

とおく。方程式 $h(x) = 0$ の異なる実数解の個数は、曲線 $y = h(x)$ と x 軸の共有点の個数に等しい。

$$h'(x) = \log x + 1 - a$$

$h'(x) = 0$ となるのは、 $\log x = a - 1$ より $x = e^{a-1}$ のときである。よって $h(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)	...	e^{a-1}	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$	(1)	↘	極小	↗

ここで、 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow +0} h(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (x \log x - ax + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\log x - a + \frac{1}{x} \right) = \infty$$

である。 $h(x)$ の最小値 (極小値) を $m(a)$ とすると

$$\begin{aligned} m(a) &= h(e^{a-1}) = e^{a-1} \log(e^{a-1}) - ae^{a-1} + 1 \\ &= e^{a-1}(a-1) - ae^{a-1} + 1 \\ &= -e^{a-1} + 1 \end{aligned}$$

曲線 $y = h(x)$ と x 軸の共有点の個数は、 $m(a)$ によって以下のように分類される。

(i) $m(a) > 0$ すなわち $1 - e^{a-1} > 0$ のとき

$e^{a-1} < 1$ より $a - 1 < 0$ すなわち $a < 1$ である。このとき最小値が正であるから、すべての $x > 0$ において $h(x) > 0$ となり、共有点は 0 個。

(ii) $m(a) = 0$ すなわち $1 - e^{a-1} = 0$ のとき

$a = 1$ である。このとき最小値が 0 であり、 $x = 1$ において曲線 $y = h(x)$ は x 軸に接する。したがって、共有点は 1 個。

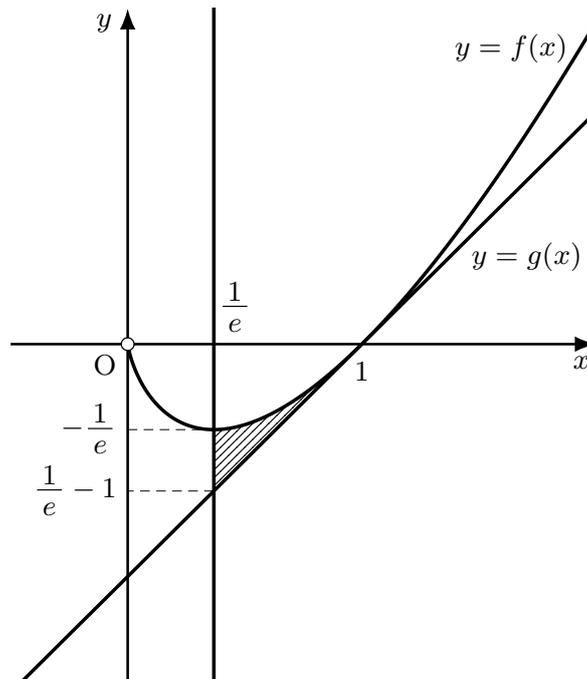
(iii) $m(a) < 0$ すなわち $1 - e^{a-1} < 0$ のとき

$a > 1$ である。このとき最小値は負である。このとき、曲線 $y = h(x)$ の増減表より、共有点は 2 個。以上より、求める共有点の個数は

$$\begin{cases} a < 1 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a = 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a > 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \end{cases}$$

である。

(3) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ の共有点の個数が 1 個のとき、(2) より $a = 1$ である。このとき $g(x) = x - 1$ であり、点 $(1, 0)$ において曲線 $y = f(x)$ に接する。また、 $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ より曲線は接線の上側にあるから、次図の斜線部分の領域を y 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積 V を求めればよい。



直線 $y = x - 1$, x 軸, y 軸, 直線 $y = \frac{1}{e} - 1$ で囲まれた台形を y 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を V_1 , 直線 $x = \frac{1}{e}$, $y = -\frac{1}{e}$, $y = \frac{1}{e} - 1$, y 軸で囲まれた長方形を y 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を V_2 , 曲線 $y = x \log x$ ($\frac{1}{e} \leq x \leq 1$), 直線 $y = -\frac{1}{e}$, x 軸, y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を V_3 とすると, 求める立体の体積 V は

$$V = V_1 - V_2 - V_3 \quad \dots\dots ①$$

である。以下では, 各立体の体積を順番に計算していく。

まず, V_1 は直線 $x = y + 1$ を区間 $\frac{1}{e} - 1 \leq y \leq 0$ で y 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積であるから

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{\frac{1}{e}-1}^0 (y+1)^2 dy \\ &= \pi \left[\frac{(y+1)^3}{3} \right]_{\frac{1}{e}-1}^0 \\ &= \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{e^3} \right) \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

次に, V_2 は, 底面の半径 $\frac{1}{e}$, 高さ $(-\frac{1}{e}) - (\frac{1}{e} - 1) = 1 - \frac{2}{e}$ の円柱の体積であるから

$$V_2 = \pi \left(\frac{1}{e} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{e} \right) = \pi \left(\frac{1}{e^2} - \frac{2}{e^3} \right) \quad \dots\dots ③$$

最後に, V_3 は, 置換積分を用いて計算する。 $y = x \log x$ より $dy = (\log x + 1) dx$ であ

り、 $y = -\frac{1}{e}$ のとき、 $x = \frac{1}{e}$ 、 $y = 0$ のとき、 $x = 1$ であるから

$$\begin{aligned} V_3 &= \pi \int_{-\frac{1}{e}}^0 x^2 dy \\ &= \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 x^2 (\log x + 1) dx \\ &= \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 (x^2 \log x + x^2) dx \end{aligned}$$

ここで

$$\int x^2 \log x dx = \frac{1}{3} x^3 \log x - \int \frac{1}{3} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となるから

$$\begin{aligned} V_3 &= \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 (x^2 \log x + x^2) dx \\ &= \pi \left[\frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= \pi \left[\frac{x^3}{3} \log x + \frac{2}{9} x^3 \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= \pi \left\{ \frac{2}{9} - \left(-\frac{1}{3e^3} + \frac{2}{9e^3} \right) \right\} \\ &= \pi \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{9e^3} \right) \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

である。②～④を①に代入することにより、求める体積は

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 - V_3 \\ &= \pi \left(\frac{1}{9} + \frac{14}{9e^3} - \frac{1}{e^2} \right) \end{aligned}$$

となる。

((注))1 (2) は $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ を確かめた後、 $y = f(x)$ のグラフの接線が点 $(0, -1)$ を通る条件を求めて、それを基に判断してもよい。

((注))2 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ 、および、直線 $x = \frac{1}{e}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を V として、バームクーヘン型の積分公式を用い

れば

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{\frac{1}{e}}^1 x \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= 2\pi \int_{\frac{1}{e}}^1 x \{x \log x - (x - 1)\} dx \\ &= 2\pi \int_{\frac{1}{e}}^1 (x^2 \log x - x^2 + x) dx \end{aligned}$$

を計算することによって求まる。ここで

$$\int x^2 \log x \, dx = \frac{1}{3} x^3 - \int \frac{1}{3} x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となるから

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{\frac{1}{e}}^1 (x^2 \log x - x^2 + x) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} \log x - \frac{4}{9} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{9} + \frac{14}{9e^3} - \frac{1}{e^2} \right) \end{aligned}$$

である。