2026　早稲田大学　教育学部　数学　解答例

1

(1) $\dfrac{23}{648}$　　(2) $k=3+3\sqrt{2}$　　(3) $2N+1$　　(4) $a=\dfrac{3-\sqrt{6}}{2}$

2

(1), (2)

$$P(x)=x^2+x+1$$

とおくと

$$f(x)=xP(x)+2x+1 \quad \cdots ①$$

である．また

$$(2x+1)^2=4P(x)-3$$

であるから，①の両辺を n 乗して二項定理を用いれば

$$\begin{aligned}\left(f(x)\right)^n &= (xP(x)+2x+1)^n \\ &= (xP(x))^n+\cdots+{}_n\mathrm{C}_1\,(xP(x))\cdot(2x+1)^{n-1}+(2x+1)^n \\ &= P(x)\left(x^n\,(P(x))^{n-1}+\cdots+n(2x+1)^{n-1}\right)+R(x)\end{aligned}$$

となり，$R(x)$ は

$$R(x)=\begin{cases}\{4P(x)-3\}^{\left[\frac{n}{2}\right]} & (n\text{: 偶数}) \\ \{4P(x)-3\}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot(2x+1) & (n\text{: 奇数})\end{cases}$$

となる．$R(x)$ について二項展開することにより，$(f(x))^n$ を $P(x)$ で割ったときの余り $r_n(x)$ は

$$r_n(x)=\begin{cases}(-3)^{\left[\frac{n}{2}\right]} & (n\text{: 偶数}) \\ (-3)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot(2x+1) & (n\text{: 奇数})\end{cases}$$

となる．特に $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ として

$$r_1(x)=2x+1,\ r_2(x)=-3,\ r_3(x)=-6x-3,\ r_4(x)=9$$

(3)

(2) より

$$|r_n(m)|=\begin{cases}(-3)^{\left[\frac{n}{2}\right]} & (n\text{: 偶数}) \\ (-3)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot(2m+1) & (n\text{: 奇数})\end{cases}$$

である．

$(n,\ m)$=$(6,\ 1)$ すなわち $n+m=7$ のとき $|r_6(1)|=3^3$ なので，正の約数は 4 個である．

よって，$n+m$ の最小値は 7 以下であるから，$n+m=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ のときを調べれば十分である．

$(n,\ m)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 2)$	$(2,\ 1)$	$(1,\ 3)$	$(2,\ 2)$	$(3,\ 1)$
$\lvert r_n(m)\rvert$	3	5	3	7	3	3^2
正の約数の個数	2	2	2	2	3	3

$(n,\ m)$	$(1,\ 4)$	$(2,\ 3)$	$(3,\ 2)$	$(4,\ 1)$
$\lvert r_n(m)\rvert$	3^2	3	$3\cdot 5$	3^2
正の約数の個数	2	2	4	3

以上より，$n+m$ の最小値は 5 であり，このとき

$$n=3,\ m=2$$

である．

$\boxed{3}$

(1)

$\overrightarrow{a}=(1,\ 2)$ より，条件から

$$(x+2y+z,\ 2x+y)=\overrightarrow{0}$$

である．これより

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

となり，$y=-2x$ となるので

$$x+2(-2x)+z=0$$
$$3x=z$$

となる．これより，実数 k を用いて，直線 $l_{\overrightarrow{a}}$ 上の点 P の座標は

$$\mathrm{P}(k,\ -2k,\ 3k)$$

と表すことができる．ここで，OP=1 であるので

$$k^2+4k^2+9k^2=1$$
$$k^2=\frac{1}{14}$$
$$k=\pm\frac{1}{\sqrt{14}}$$

である．したがって，求める点 P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{14}},\ \mp\frac{2}{\sqrt{14}},\ \pm\frac{3}{\sqrt{14}}\right)\quad(\text{複号同順})$$

(2)

(1) と同様に考えると，$y=-2tx$，$z=3tx$ となるので，直線 $l_{\overrightarrow{a}}$ の点を R とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=x(1,\ -2t,\ 3t)$$

となる．点 Q の座標を $(l,\ m,\ n)$ とし，条件から $\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ であることから

$$l-2tm+3tn=l+t(3n-2m)=0$$

となる．これがすべての t について成り立つので

$$l=0,\ 2m=3n$$

となる．ここで OQ=1 であるので

$$m^2+n^2=1$$

となる．これらより

$$m=\pm\frac{3}{\sqrt{13}}\ ,\ n=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\quad(\text{複号同順})$$

となる．よって求める点 Q の座標は

$$\mathrm{Q}\left(0,\ \pm\frac{3}{\sqrt{13}},\ \pm\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\quad(\text{複号同順})$$

(3)

条件より $x=y=z=1$ であるので

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}&=\vec{0}\\ \vec{a}&=(-2-1,\ -1)\\ \vec{a}&=(-3,\ -1)\end{aligned}$$

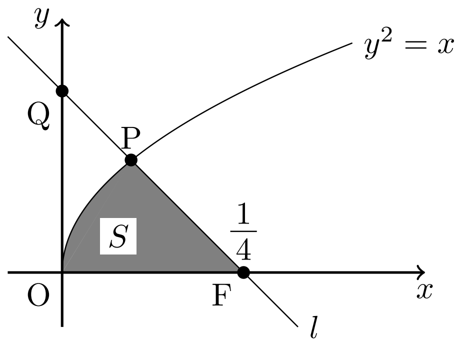
$\boxed{4}$

(1)

$\theta \to +0$ であるので，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ としてもよい．
直線 l と y 軸との交点を Q とすると，図より

$$\triangle\mathrm{OFP} < S < \triangle\mathrm{OFQ}$$

である．



$\angle\mathrm{OFP}=\theta$ であり，$\mathrm{OF}=\dfrac{1}{4}$ であることから $\mathrm{OQ}=\dfrac{1}{4}\tan\theta$ となる．これより

$$\frac{1}{8}\mathrm{FP}\sin\theta < S < \frac{1}{32}\tan\theta$$

となる．ここで，$\theta \to +0$ のとき $\mathrm{FP}\to\dfrac{1}{4}$ であること，および，$\dfrac{\sin\theta}{\theta} \to 1$，$\dfrac{\tan\theta}{\theta} \to 1$ により

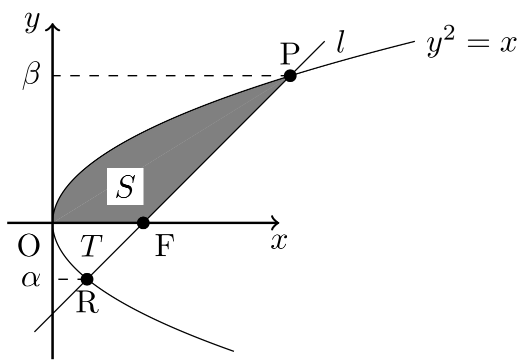
$$\frac{1}{8}\mathrm{FP}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta} < \frac{S}{\theta} < \frac{1}{32}\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}$$

の最左辺と最右辺はともに $\dfrac{1}{32}$ に収束する．よって

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S}{\theta} = \frac{1}{32}$$

(2)

このとき，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ としてよい．



直線 l の傾きは $-\tan\theta$ なので

$$l\colon x=-\frac{y}{\tan\theta}+\frac{1}{4}$$

である．これと，$x=y^2$ を連立して

$$y=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\tan\theta}\pm\frac{1}{\sin\theta}\right)$$

となる．図の点 P，R の y 座標を β，α とすれば放物線と直線とで囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\left(-\frac{y}{\tan\theta}+\frac{1}{4}-y^2\right)dy&=\int_\alpha^\beta-(y-\alpha)(y-\beta)dy\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sin^3\theta}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sin^3(\pi-\theta)}\end{aligned}$$

となる．また，$\theta\to\pi-0$ のとき，図の面積 T は $T\to 0$ となるので，θ が π に十分近いときに $0\leqq T\leqq 1$ としてよい．よって

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sin^3(\pi-\theta)}-1\leqq S\leqq\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sin^3(\pi-\theta)}$$

$$\frac{1}{6}\left\{\frac{\pi-\theta}{\sin(\pi-\theta)}\right\}^3-(\pi-\theta)^3\leqq(\pi-\theta)^3S\leqq\frac{1}{6}\left\{\frac{\pi-\theta}{\sin(\pi-\theta)}\right\}^3$$

となる．ここで $\pi-\theta\to 0$ より $\dfrac{\pi-\theta}{\sin(\pi-\theta)}\to 1$ であるから，最左辺と最右辺はともに $\dfrac{1}{6}$ に収束する．したがって

$$\lim_{\theta\to\pi-0}(\pi-\theta)^3S=\frac{1}{6}$$