2026　早稲田大学　商学部　数学　解答例

$\boxed{1}$

$\boxed{\text{ア}}$　$\alpha + \sin\alpha$

$\boxed{\text{イ}}$　$x^{11} + 34x^6 + 289x - 25$

$\boxed{\text{ウ}}$　$\sqrt{4n^2 + 2n + 1}$

$\boxed{\text{エ}}$　$2n^2 - \dfrac{9}{2}n$

$\boxed{2}$

(1)

$$n^2 a_{n+1} = (n+1)^2 a_n - 26n(n+1)$$

の両辺を $n^2(n+1)^2$ で割ると

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} &= \frac{a_n}{n^2} - \frac{26}{n(n+1)} \\ &= \frac{a_n}{n^2} - \frac{26}{n} + \frac{26}{n+1}\end{aligned}$$

であるから，$b_n = \dfrac{a_n}{n^2} - \dfrac{26}{n}$ とおけば

$$b_{n+1} = b_n$$

より

$$b_n = b_1 = a_1 - 26 = c - 26.$$

よって

$$a_n = \underline{n\{(c-26)n+26\}}$$

となる．

(2)　$c \geqq 26$ のとき a_n は単調増加となり不適．よって $c < 26$ であるが，2 次関数 $x\{(c-26)x+26\}$ は $x = \dfrac{13}{26-c}$ で最大値をとり，その最大値が 56 以上であることより

$$\begin{aligned}56 &\leqq \frac{13}{26-c}(-13+26) \\ &= \frac{169}{26-c}.\end{aligned}$$

これを解いて

$$c \geqq \frac{1287}{56} = 22.98\cdots,$$

すなわち

$$c = 23, 24, 25.$$

ここで a_n は $\dfrac{13}{26-c}$ に最も近い整数 n で最大になるから，$c=23$ のとき $n=4$，$c=24$ のとき $n=6, 7$，$c=25$ のとき $n=13$ で最大．

一方，

$$56 = n\{(c-26)n+26\}$$

なので最大となる n は 56 を割り切らなければならないが，$n=6,13$ は 56 の約数ではないため $c=24,25$ は不適.

したがって，

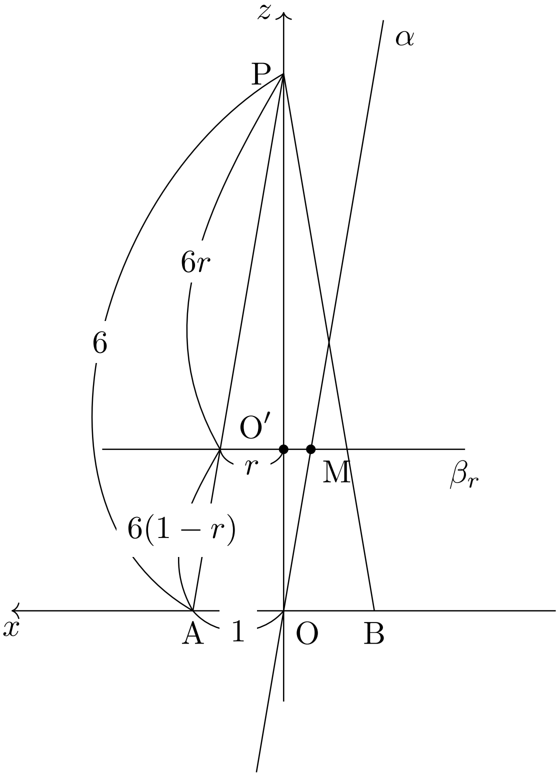
$$c = \underset{\sim\sim}{23}$$

が求めるものである．実際，このとき

$$a_4 = 4\{(-3)\cdot 4+26\} = 4\cdot 14 = 56.$$

$\boxed{3}$

(1)　AB，CD は互いに直交する S の直径であるから，円 S の中心 O は xyz 空間の原点で，円は平面 $z=0$ 上にあり，$\mathrm{A}(1,0,0),\mathrm{B}(-1,0,0),\mathrm{C}(0,-1,0),\mathrm{D}(0,1,0)$ としてよい．ここで $\mathrm{OP}=\sqrt{\mathrm{PA}^2-\mathrm{OA}^2}=\sqrt{35}$ より $\mathrm{P}(0,0,\sqrt{35})$ としてよい．このとき平面 α は y 軸を含み直線 PA に平行である．題意の状況を平面 $y=0$ で切断したものが右図である．図において，平面 β_r と z 軸との交点が点 O$'$，平面 β_r と平面 α との交点が点 M である．△AOP と △MO$'$O は相似であるから，$\mathrm{MO'}=\dfrac{1}{6}\mathrm{OM}=1-r$ となる．よって，平面 β_r での切断面は右下図である．これより



$$r^2=(1-r)^2+\frac{l^2}{4}$$
$$=r^2-2r+1+\frac{l^2}{4}$$

であるから，

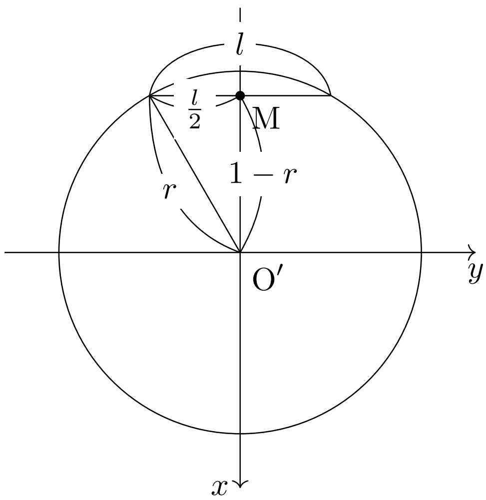
$$l=\underline{2\sqrt{2r-1}}$$

が分かる．

また距離 d は OM で与えられるから，

$$d=\mathrm{OM}=\underline{6(1-r)}$$

である．

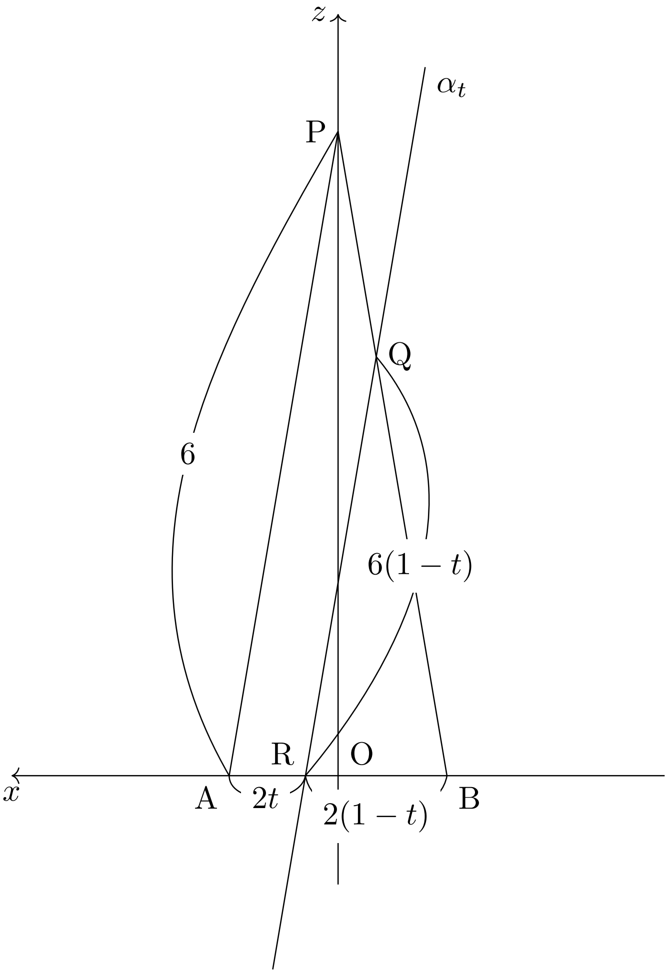


(2)　このとき平面 $y=0$ で切断した状況が右図である．この平面上で，α_t と線分 PB の交点を点 Q，x 軸との交点を点 R とおく．

(1) 同様，相似な三角形を考えて $\mathrm{QR}=6(1-t)$ が分かる．さらに，xy 平面上で α_t との交線を考えると右の 2 番目の図の状況になるから，方べきの定理を用いて

$$4t(1-t)=L^2$$

より $L=2\sqrt{t(1-t)}$.



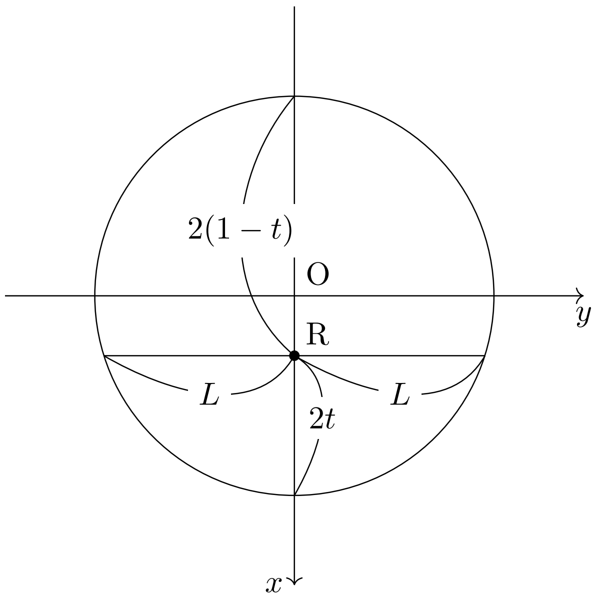
最後に，平面 α_t は直円錐 V の母線 PA に平行であるから，α_t と V の側面との共通部分は，Q を頂点，QR を軸とする放物線をなす．α_t 上に適当に XY 直交座標系をとれば，この放物線は $Y=aX^2$ と書くことができる．軸から $L=2\sqrt{t(1-t)}$ 離れた点の，頂点からの高さが $\mathrm{QR}=6(1-t)$ であることより

$$6(1-t)=a\cdot 4t(1-t)$$

すなわち

$$a=\frac{3}{2t}$$

である．



ここで放物線と直線で囲まれた部分の面積公式より，α_t と V の共通部分の面積を T として

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2t}\left\{4\sqrt{t(1-t)}\right\}^3\\&=16\sqrt{t(1-t)^3}\end{aligned}$$

となるから，$f(t)=t(1-t)^3$ として $f(t)$　$(0<t<1)$ の最大値を考える．

$$\begin{aligned}f'(t)&=(1-t)^3+t\cdot 3(1-t)^2\cdot(-1)\\&=(1-t)^2(1-4t)\end{aligned}$$

より $f(t)$ は $t < \dfrac{1}{4}$ で増加，$t > \dfrac{1}{4}$ で減少．よって T は $t = \dfrac{1}{4}$ で最大となる．

以上より T の最大値は

$$\begin{aligned} 16\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^3} &= 16 \cdot \frac{\sqrt{3^3}}{4^2} \\ &= \underset{\sim\sim\sim}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

である．