2026　早稲田大学　社会科学部　数学　解答例

1　$|x+2y|+|2x-y| \leqq 1$　$\cdots\cdots$①　とする.

(1)

(i) $\begin{cases} x+2y \geqq 0 \\ 2x-y \geqq 0 \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} y \geqq -\dfrac{1}{2}x \\ y \leqq 2x \end{cases}$ のとき

$$① \iff (x+2y)+(2x-y) \leqq 1 \iff y \leqq -3x+1$$

である.

(ii) $\begin{cases} x+2y \geqq 0 \\ 2x-y \leqq 0 \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} y \geqq -\dfrac{1}{2}x \\ y \geqq 2x \end{cases}$ のとき

$$① \iff (x+2y)-(2x-y) \leqq 1 \iff y \leqq \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$$

である.

(iii) $\begin{cases} x+2y \leqq 0 \\ 2x-y \geqq 0 \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{2}x \\ y \leqq 2x \end{cases}$ のとき

$$① \iff -(x+2y)+(2x-y) \leqq 1 \iff y \geqq \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$$

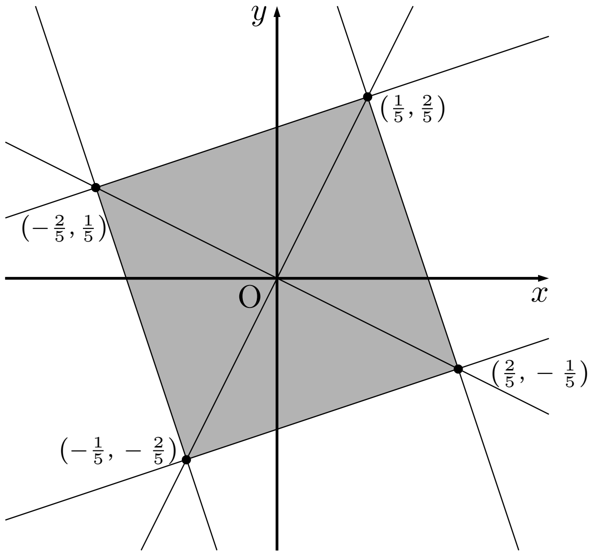
である.

(iv) $\begin{cases} x+2y \leqq 0 \\ 2x-y \leqq 0 \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{2}x \\ y \geqq 2x \end{cases}$ のとき

$$① \iff -(x+2y)-(2x-y) \leqq 1 \iff y \geqq -3x-1$$

である.

(i)〜(iv) より，領域 D は下図の網目部分 (境界線を含む) となる．



(2)　$x-y=k$ とおく．直線 $y=x-k \cdots\cdots$ ② と領域 D が共有点をもつときを考える．

k が最大となるのは直線 ② の y 切片が最小のときである．$\dfrac{1}{3}<1$ より直線 ② が点 $\left(\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{1}{5}\right)$ を通るときである．同様に，k が最小となるのは直線 ② が点 $\left(-\dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$ を通るときである．

よって，k の $\begin{cases} \text{最大値は } \dfrac{3}{5} & (x,\ y)=\left(\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{1}{5}\right) \\ \text{最小値は } -\dfrac{3}{5} & (x,\ y)=\left(-\dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{5}\right) \end{cases}$

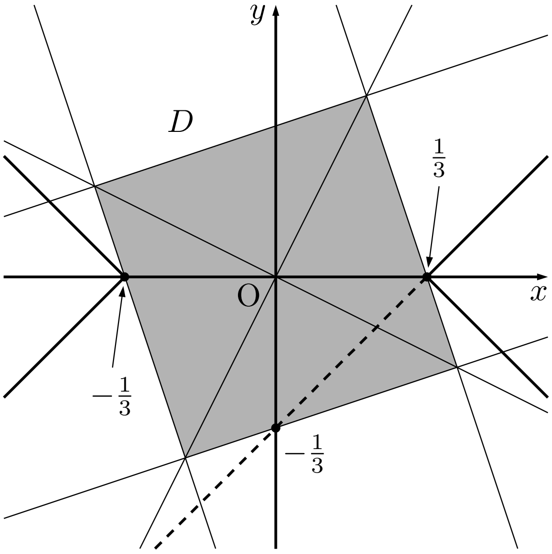
である．

(3)　$|x|-|y|=l$ とおく．図形 $|y|=|x|-l$　$\cdots\cdots$ ③ と領域 D が共有点をもつときを考える．

図形 ③ について x を $-x$，y を $-y$ と置換しても，③ 式は成り立つため，図形 ③ は x 軸，y 軸に対称である．図形 ③ の領域 $\{(x,\ y)\,|\,x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ の部分は直線 $y=x-l$ であり，(2) と同様に y 切片を考える．

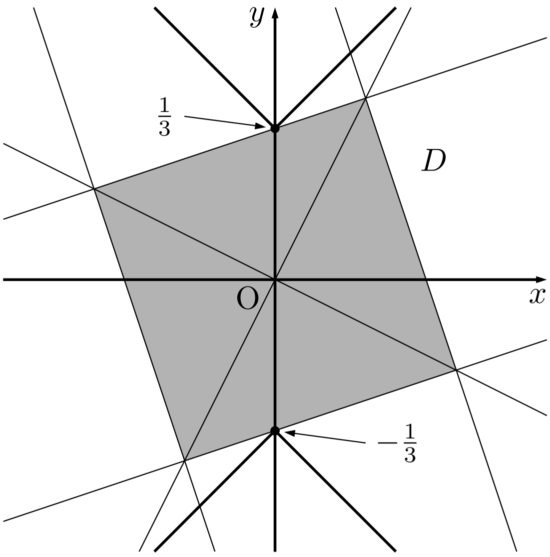
(i) $l \geqq 0$ のとき

下図より，$-\dfrac{1}{3} \leqq -l \leqq 0$ すなわち $0 \leqq l \leqq \dfrac{1}{3}$ である．ただし，$l = \dfrac{1}{3}$ となるのは図形 ③ が点 $\left(\pm\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ を通るときである．



(ii) $l \leqq 0$ のとき

下図より，$0 \leqq -l \leqq \dfrac{1}{3}$ すなわち $-\dfrac{1}{3} \leqq l \leqq 0$ である．ただし，$l = -\dfrac{1}{3}$ となるのは図形 ③ が点 $\left(0, \pm\dfrac{1}{3}\right)$ を通るときである．



(i)，(ii) より，l の $\begin{cases} 最大値は\ \dfrac{1}{3} & (x,\ y) = \left(\pm\dfrac{1}{3},\ 0\right) \\ 最小値は\ -\dfrac{1}{3} & (x,\ y) = \left(0,\ \pm\dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$

2　(1)　条件を満たすすべての組 $(x,\ y,\ z)$ を

(i) $y > z$,　(ii) $y = z$,　(iii) $y < z$

の排反な 3 つの事象に分け，すべての組 $(x,\ y,\ z)$ の総数を A，(ii) となる組の総数を B とする．対称性より (i) となる組と (iii) となる組の総数は等しい．これより

$$\begin{aligned}(y \geqq z\ \text{となる組の総数}) &= ((\text{i})\ \text{となる組の総数}) + ((\text{ii})\ \text{となる組の総数})\\ &= \frac{A-B}{2} + B\\ &= \frac{A+B}{2} \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

である．

A は，x，y，z の異なる 3 種類の文字から，重複を許して n 個取る組合せの総数に等しい．これは n 個の○と 2 個の仕切り | の順列の総数に等しいから

$$A = {}_{n+2}\mathrm{C}_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

である．

B は，$y = z = k$ とすると，取りうる k の個数に一致する．$x + k + k = n$，$x \geqq 0$，$k \geqq 0$ より，$0 \leqq k \leqq \dfrac{n}{2}$ を満たすから

$$B = \begin{cases} \dfrac{n}{2} + 1 & (n\ \text{が偶数のとき}) \quad \cdots\cdots ③\\[2ex] \dfrac{n-1}{2} + 1 & (n\ \text{が奇数のとき}) \quad \cdots\cdots ④\end{cases}$$

である．

したがって，$y \geqq z$ となる組の総数は ①，②，③，④ より

$$\begin{cases} \dfrac{(n+2)^2}{4} & (n\ \text{が偶数のとき})\\[2ex] \dfrac{(n+1)(n+3)}{4} & (n\ \text{が奇数のとき})\end{cases}$$

である．

(2)　n 回投げたとき，すべての出た目が，0 または 1 である確率を P_C，0 である確率を P_D とする．n 回投げたとき，出た目の最大値が 1 となる確率は

$$P_C - P_D = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である．

(3)　求める確率を p とする．奇数回目に初めて 0 以外の目が出て，その目が 2 であるのは，以下の 2 つの場合である．

(i) 1 回目に 2 の目が出る．
(ii) 3 回目以降の奇数回目に初めて 0 以外の目が出て，その目が 2 である．

(i)，(ii) の確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^2 p$ であり，これらの事象は排反であるから

$$p = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 p$$

が成り立つ．したがって，$p = \underset{\sim\sim}{\frac{2}{9}}$ である．

3

$$31x + 19y = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

(1)

$$31 = 19 + 12$$
$$19 = 12 + 7$$
$$12 = 7 + 5$$
$$7 = 5 + 2$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

ここで，$m = 31$，$n = 19$ とおくと

$$1 = 8m - 13n$$

であるから

$$31 \cdot 8 + 19 \cdot (-13) = 1 \quad \cdots\cdots ②$$

① − ② より

$$-31(x - 8) = 19(y + 13)$$

31 と 19 は互いに素であるから，k を整数として

$$x = \underline{19k + 8}$$
$$y = \underline{-31k - 13}$$

を得る．

(2)　題意を満たす自然数を N_1 とすると，整数 p, q を用いて

$$N_1 = 19p, \quad N_1 = 31q + 1 \quad (\text{ただし } N_1 \geqq 1)$$

と表される．したがって

$$\begin{aligned} &19p = 31q + 1 \\ &-31q + 19p = 1 \\ &31(-q) + 19p = 1 \end{aligned}$$

が成り立つ．(1) より，整数 s を用いて

$$\begin{aligned} &q = -19s - 8 \\ &p = -31s - 13 \end{aligned}$$

であり，$N_1 \geqq 1$ より $p \geqq 1$ だから，これを満たす最小の p は

$$p = 18 \quad (s = -1)$$

である．したがって

$$N_1 = 19 \cdot 18 = \underline{342}$$

である．

(3)　題意を満たす自然数を N_2 とすると，整数 i, j を用いて

$$N_2 = 19i + 10, \quad N_2 = 31j + 20 \quad (\text{ただし } N_2 \geqq 1)$$

と表される．したがって

$$\begin{aligned} &19i + 10 = 31j + 20 \\ &-31j + 19i = 10 \quad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

が成り立つ．② より

$$-31 \cdot (-80) + 19 \cdot (-130) = 10 \quad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ．③ − ④ より，(1) と同様に考えて，整数 t を用いて

$$\begin{aligned} j &= 19t - 80 \\ i &= 31t - 130 \end{aligned}$$

と表される．$N_2 \geqq 1$ より $i \geqq 0$ だから，これを満たす最小の i は

$$i = 25 \quad (t = 5)$$

である．したがって

$$N_2 = 19 \cdot 25 + 10 = \underline{485}$$

である．