2026　慶應義塾大学　経済学部　数学　解答例

[1]

問題番号	解答記号	正解
(1)	1	3
	2	5
	3, 4	80
	5, 6, 7	$5\sqrt{13}$
(2)	8	0
	9	1
	10	4
	11	4
	12, 13, 14	$\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$
	15, 16, 17	$\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$

[2]

問題番号	解答記号	正解
(1)	18, 19, 20	$-\dfrac{15}{2}$
	21	0
(2)	22, 23, 24, 25	$\dfrac{81}{16}$
	26	1
(3)	27, 28	81
(4)	29, 30, 31	-312
	32, 33	81
(5)	34, 35, 36, 37	$\dfrac{39}{10}$
	38, 39	81
	40, 41, 42	$\dfrac{1}{10}$

[3]

問題番号	解答記号	正解
(1)	43 44	$\dfrac{4}{9}$
	45, 46, 47	$\dfrac{7}{27}$
(2)	48	7
(3)	49, 50	$\dfrac{2}{9}$
	51, 52	$\dfrac{2}{3}$
(4)	53, 54, 55	$\dfrac{20}{9}$
	56, 57, 58, 59, 60	$\dfrac{3460}{3}$

[4]

$X=\log_2 x$ とおくと，x と X は 1 対 1 に対応し

$$
\begin{aligned}
(*) &\iff X^2+\frac{2}{3}\sqrt{t}\frac{-6X}{\log_2 4}+4=0\\
&\iff X^2-2\sqrt{t}X+4=0\cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

(1) $t=\dfrac{25}{4}$ のとき

$$
\begin{aligned}
① &\iff X^2-5X+4=0\\
&\iff (X-1)(X-4)=0\\
&\iff X=1,4
\end{aligned}
$$

$X=\log_2 x$ より $x=2,16$

(2) $X=\log_2 x$ より，$(*)$ が $\sqrt{2}<\alpha<\beta$ をみたす 2 つの実数解をもつことは，① が $\dfrac{1}{2}$ より大きい 2 つの実数解をもつことと同値である。① の判別式を D，① の左辺を $f(X)$ とおく。$f(X)$ のグラフの軸は $X=\sqrt{t}$ なので，以下をみたせばよい。

$$
\begin{cases}\sqrt{t}>\frac{1}{2}\\ D>0\\ f\left(\frac{1}{2}\right)>0\end{cases}
\iff
\begin{cases}\sqrt{t}>\frac{1}{2}\\ t-4>0\\ \frac{1}{4}-\sqrt{t}+4>0\end{cases}
$$

$$
\iff 4<t<\frac{289}{16}
$$

(3) $(*)$ の解が α,β なので，① の解は $\log_2\alpha,\log_2\beta$ である。① の解と係数の関係より

$$
\begin{cases}\log_2\alpha+\log_2\beta=2\sqrt{t}\\ \log_2\alpha\cdot\log_2\beta=4\end{cases}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
y&=\frac{1}{4}\{(\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha)-14\}^2(\log_2\beta-\log_2\alpha)^2\\
&=\frac{1}{4}\left\{\frac{(\log_2\alpha+\log_2\beta)^2-2(\log_2\alpha)(\log_2\beta)}{(\log_2\alpha)(\log_2\beta)}-14\right\}^2\{(\log_2\beta+\log_2\alpha)^2-4(\log_2\alpha)(\log_2\beta)\}^2\\
&=\frac{1}{4}\left\{\frac{(2\sqrt{t})^2-2\cdot 4}{4}-14\right\}^2\{(2\sqrt{t})^2-4\cdot 4\}\\
&=(t-4)(t-16)^2
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
y'&=(t-16)^2+2(t-4)(t-16)\\
&=3(t-8)(t-16)
\end{aligned}
$$

(2) より $4<t<\dfrac{289}{16}$ なので，増減表は以下の通り。

t	(4)	$\cdots$	8	$\cdots$	16	$\cdots$	$\left(\dfrac{289}{16}\right)$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	256	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$t=4$ を代入すると $y=0$ で，$t=20\left(>\dfrac{289}{16}\right)$ を代入すると

$$\begin{aligned} y &= (20-4)(20-16)^2 \\ &= 256 \end{aligned}$$

また，$t=\dfrac{289}{16}$ における y の値は，$t=8, 20$ における値（256）よりも小さい。

以上より $0 \leqq y \leqq 256$。

[5]

$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とすると

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{d}| = 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{d} = \frac{1}{2}, \quad \vec{b}\cdot\vec{d} = 0$$

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = t\vec{b} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AF}} = (1-t)\vec{d} - \vec{a}$$

より

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|^2 &= t^2|\vec{b}|^2 - 2t\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ &= t^2 - t + 1 \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right| &= \underline{\sqrt{t^2 - t + 1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}} &= t(1-t)\vec{b}\cdot\vec{d} - t\vec{a}\cdot\vec{b} - (1-t)\vec{a}\cdot\vec{d} + |\vec{a}|^2 \\ &= \underline{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AF}}\right| = \sqrt{t^2 - t + 1}$ に注意して

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AF}}\right|} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{t^2 - t + 1} \\ &= \frac{1}{2\left\{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\}}\end{aligned}$$

$0 < t < 1$ より $\dfrac{3}{4} \leqq \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} < 1$ なので，$\underline{\dfrac{1}{2} < \cos\theta \leqq \dfrac{2}{3}}$。

(3) $\cos\theta$ が最大となるのは $t = \dfrac{1}{2}$ のとき。$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$ で，点 G は直線 OC 上なので，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = -k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{d}$$

と表せる。また，点 G は平面 AEF 上にあるので，実数 u, v を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = (1 - u - v)\vec{a} + \frac{1}{2}u\vec{b} + \frac{1}{2}v\vec{d}$$

と表せる。$\vec{a},\vec{b},\vec{d}$ は一次独立なので

$$\begin{cases} 1-u-v=-k \\ u=2k \\ v=2k \end{cases}$$

$$1=-k+2k+2k \iff k=\frac{1}{3}$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}$ なので，$\underset{\sim}{\alpha=-\frac{1}{3},\ \beta=\frac{1}{3},\ \gamma=\frac{1}{3}}$。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}$ なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{d}\\&=0\\ \overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=-\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{d})\cdot\vec{a}+\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{d})\cdot(\vec{b}+\vec{d})\\&=0\end{aligned}$$

よって線分 EF は平面 OAC に垂直である。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ に注意すると三角形 OAG の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|&=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ なので

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\underset{\sim}{\frac{\sqrt{2}}{36}}\end{aligned}$$

[6]

(1) 解と係数の関係から

$$\begin{cases} s+t+u=0 \\ st+tu+us=a \\ stu=-b \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

また

$$u-t=2(t-s) \iff 2s+u=3t$$

これと ① の第 1 式より

$$\begin{cases} s = 4t \\ u = -5t \end{cases}$$

また ① の第 2 式より

$$\begin{aligned} a &= st+tu+us \\ &= 4t^2-5t^2-20t^2 \\ &= -21t^2 \end{aligned}$$

① の第 3 式より

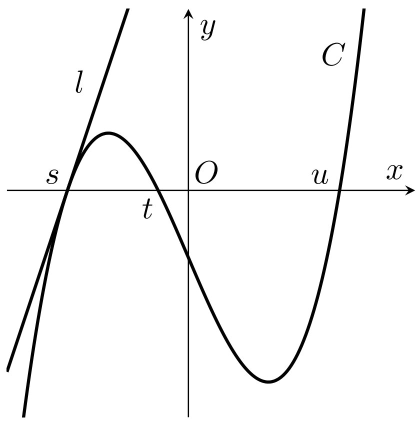
$$\begin{aligned} b &= -stu \\ &= 20t^3 \end{aligned}$$

(2) $l : y=g(x)$ とおくと $g(x)$ は 1 次式で，C と l は $x=s$ で接するので

$$x^3+ax+b=g(x)$$

が $x=s$ で重解をもつことになる。点 B の x 座標を β とおくと，解と係数の関係から

$$s+s+\beta=0 \iff \beta=-2s$$



$s=4t$ より $\beta=-8t$。また

$$\begin{aligned}S&=\int_s^\beta\{g(x)-(x^3+ax+b)\}dx\\&=-\int_s^\beta(x-s)^2(x-\beta)dx\\&=\frac{1}{12}(\beta-s)^4\\&=\frac{1}{12}(-8t-4t)^4\\&=12^3t^4\\&=\underline{1728t^4}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}7S=-4a+42b&\iff 7\cdot12^3t^4=-4(-21t^2)+42(20t^3)\\&\iff 144t^4-10t^3-t^2=0\\&\iff t^2(18t+1)(8t-1)=0\end{aligned}$$

$s<t<u \iff 4t<t<-5t$ を満たすのは $t=\underline{-\dfrac{1}{18}}$。