2026 同志社大学（2/4 実施　全学部日程（理系））数学（理系）　解答例

〔I〕

(1)	$\boxed{ア}$	$\dfrac{19}{64}$	$\boxed{イ}$	11	$\boxed{ウ}$	3^n	$\boxed{エ}$	$2n+1$	$\boxed{オ}$	n^2+3n+8
(2)	$\boxed{カ}$	2	$\boxed{キ}$	$\dfrac{31}{8}$	$\boxed{ク}$	$2t$	$\boxed{ケ}$	-4	$\boxed{コ}$	$\dfrac{20}{27}$

■解説□

(1) k 回目に表が出た枚数を X_k とするので，X_k が取る値は 0，1，2 のいずれかに限られる．

よって，

$$\begin{cases} X_k = 0 \text{ である確率は，} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4} \\ X_k = 1 \text{ である確率は，} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2} \\ X_k = 2 \text{ である確率は，} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

となる．

$X_1 \times X_2 \times X_3 \geqq 2$ となる X_1，X_2，X_3 の組 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ は，$(1,\ 1,\ 2)$，$(1,\ 2,\ 2)$，$(2,\ 2,\ 2)$ の 3 組なので，各組において 1，2 の順番も考慮すると，

$$p_3(2) = {}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \underbrace{\frac{19}{64}}_{ア}$$

また，$0 \leqq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \leqq 2^n$ であるから，$p_n(2026) > 0$ となるためには，$2026 \leqq 2^n$ が必要．

よって，$2^{10} = 1024 < 2026 < 2048 = 2^{11}$ であるので，$p_n(2026) > 0$ となるためには，$n \geqq 11$ が必要である．

$n = 11$ のとき，

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{11} = (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{11} = 2048 \text{ となる確率}) \leqq p_n(2026)$$

となり，$n = 11$ のとき，$p_n(2026) > 0$ が確かに成り立つので，$p_n(2026) > 0$ となる n のうち，最小のものは $n = \underbrace{11}_{イ}$．

次に，$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \geqq 1$ となる条件は，「各 X_k が取る値は 1 または 2 である」ことなので，

$$p_n(1) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\underbrace{3^n}_{ウ}}{4^n}$$

また，$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \geqq 2^{n-1}$ となる条件は，次の (i) または (ii) である．

(i) $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 2$ となる．

(ii) 各 X_k のうち，値が 2 となるものが $n-1$ 個，値が 1 となるものが 1 個ある．

よって，

$$p_n\left(2^{n-1}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\underbrace{2n+1}_{\text{エ}}}{4^n}$$

さらに，$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ が取る値が 0 または 2^N (N は $0\leqq N\leqq n$ を満たす整数) であることに注意すると，$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\geqq 5$ となる事象の余事象は，

「$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=0$ または 1 または 2 または 4」

(a) $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=0$ のとき

$\boxed{\text{ウ}}$で考えた事象の余事象を考えればよいので，このときの確率は

$$1-\frac{3^n}{4^n}$$

(b) $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=1$ のとき

これが成り立つ条件は，「$X_1=X_2=\cdots=X_n=1$」なので，このときの確率は

$$\left(\frac{2}{4}\right)^n=\frac{2^n}{4^n}$$

(c) $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=2$ のとき

これが成り立つ条件は，「各 X_k のうち，値が 2 となるものが 1 個，値が 1 となるものが $n-1$ 個ある」ことなので，このときの確率は

$${}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}=\frac{n\cdot 2^{n-1}}{4^n}$$

(d) $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=4$ のとき

これが成り立つ条件は，「各 X_k のうち，値が 2 となるものが 2 個，値が 1 となるものが $n-2$ 個ある」ことなので，このときの確率は

$${}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{2}{4}\right)^{n-2}=\frac{n(n-1)\cdot 2^{n-3}}{4^n}$$

以上 (a)〜(d) より，

$$p_n(5)=1-\left(1-\frac{3^n}{4^n}+\frac{2^n}{4^n}+\frac{n\cdot 2^{n-1}}{4^n}+\frac{n(n-1)\cdot 2^{n-3}}{4^n}\right)=\frac{3^n-\left(\underbrace{n^2+3n+8}_{\text{オ}}\right)\cdot 2^{n-3}}{4^n}$$

(2) $z^4+\dfrac{1}{z^4}=\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)^2-2=\alpha^2-2$，$z^6+\dfrac{1}{z^6}=\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)\left(z^4+\dfrac{1}{z^4}-1\right)=\alpha\left(\alpha^2-3\right)$

なので，

$$\begin{aligned}\beta&=\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^5-\frac{1}{z^5}\right)\\&=z^6+\frac{1}{z^6}-\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)=\alpha\left(\alpha^2-3\right)-\left(\alpha^2-2\right)=\alpha^3-\alpha^2-3\alpha+\underbrace{2}_{\text{カ}}\end{aligned}$$

点 z が点 1 と点 $\sqrt{2}$ を結ぶ線分上を動くとき，z は $1\leqq z\leqq\sqrt{2}$ の範囲を動く実数となるので，

α も実数となる．

このとき，$f(z)=z^2+\dfrac{1}{z^2}$ とすると，$1\leqq z\leqq\sqrt{2}$ において，

$$f'(z)=2z-\frac{2}{z^3}=\frac{2(z-1)(z+1)\left(z^2+1\right)}{z^3}\geqq 0$$

より，$f(z)$ は $1\leqq z\leqq\sqrt{2}$ において，単調に増加するので，

$$2=f(1)\leqq\alpha\leqq f\left(\sqrt{2}\right)=\frac{5}{2}$$

ここで，$g(\alpha)=\alpha^3-\alpha^2-3\alpha+2$ とすると，$2\leqq\alpha\leqq\dfrac{5}{2}$ において，

$$g'(\alpha)=3\alpha^2-2\alpha-3=3\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{10}{3}\geqq 3\left(2-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{10}{3}=5>0$$

より，$g(\alpha)$ は $2\leqq\alpha\leqq\dfrac{5}{2}$ において，単調に増加するので，$1\leqq z\leqq\sqrt{2}$ における β の最大値は，

$$g\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^3-\left(\frac{5}{2}\right)^2-3\left(\frac{5}{2}\right)+2=\underbrace{\frac{31}{8}}_{\text{キ}}$$

また，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ であるとき，$t=\cos 2\theta$ として α を t の式で表すと，

$$\begin{aligned}\alpha&=z^2+(\overline{z})^2=(\cos\theta+i\sin\theta)^2+(\cos\theta-i\sin\theta)^2\\&=2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=2\cos 2\theta=\underbrace{2t}_{\text{ク}}\end{aligned}$$

したがって，点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，$-1\leqq t\leqq 1$ であるから，

$\boxed{ク}$ より，$-2\leqq\alpha\leqq 2$ の範囲で $g(\alpha)$ の最大値と最小値を考えればよいことがわかる．

$$g'(\alpha)=3\alpha^2-2\alpha-3=3\left(\alpha-\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)\left(\alpha-\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)$$

より，$-2\leqq\alpha\leqq 2$ における $g(\alpha)$ の増減は以下の表のようになる．

α	-2	$\cdots$	$\frac{1-\sqrt{10}}{3}$	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{10}}{3}$	$\cdots$	2
$g'(\alpha)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(\alpha)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$g(-2)=(-2)^3-(-2)^2-3(-2)+2=-4$$

$$g(2)=2^3-2^2-3\cdot 2+2=0$$

また，$g(\alpha)=\left(\dfrac{1}{3}\alpha-\dfrac{1}{9}\right)g'(\alpha)-\dfrac{20}{9}\alpha+\dfrac{5}{3}$ であることを利用すると，

$$g\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)=-\frac{20}{9}\cdot\frac{1-\sqrt{10}}{3}+\frac{5}{3}=\frac{25+20\sqrt{10}}{27}$$

$$g\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)=-\frac{20}{9}\cdot\frac{1+\sqrt{10}}{3}+\frac{5}{3}=\frac{25-20\sqrt{10}}{27}$$

よって，

$$g(-2)=-4<\frac{25-20\sqrt{10}}{27}=g\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)$$

$$g\left(2\right)=0<\frac{25+20\sqrt{10}}{27}=g\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)$$

となるので，β の最小値は $\underset{ケ}{\underline{-4}}$，最大値は $\frac{25}{27}+\underset{コ}{\underline{\frac{20}{27}\sqrt{10}}}$

〔II〕■解答□

(1)　$f(x) = \log(1+e^x) - \dfrac{x}{2}$ より，

$$f(0) = \log(1+e^0) - \frac{0}{2} = \log 2$$

$$f(\log 2) = \log(1+e^{\log 2}) - \frac{\log 2}{2} = \log(1+2) - \frac{\log 2}{2} = \log 3 - \frac{1}{2}\log 2$$

$f(x)$ を x で微分すると，

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{1}{2}$$

ここで，

$$\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{(1+e^x)-1}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x}$$

であるから，

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^x}$$

条件 $f'(x) = \alpha - \dfrac{1}{1+e^x}$ がすべての実数 x で成り立つから，

$$\alpha - \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^x}$$

両辺から $-\dfrac{1}{1+e^x}$ を消去すると，$\alpha = \dfrac{1}{2}$ を得る．

$$\therefore\quad f(0) = \log 2\,,\quad f(\log 2) = \log 3 - \frac{1}{2}\log 2\,,\quad \alpha = \frac{1}{2}$$

(2)　(1) より $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} - \dfrac{1}{2}$ であるから，$f''(x)$ を求める．$\dfrac{e^x}{1+e^x}$ を微分すると，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

よって，

$$f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$f''(x) > 0$ であるから $\log f''(x)$ は定義され，

$$\log f''(x) = \log \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \log e^x - \log(1+e^x)^2 = x - 2\log(1+e^x)$$

条件 $\log f''(x) = kf(x)$ がすべての実数 x で成り立つとすると，

$$x - 2\log(1+e^x) = k\left\{\log(1+e^x) - \frac{x}{2}\right\}$$

右辺を展開して移項・整理すると，

$$\begin{aligned} x - 2\log(1+e^x) &= k\log(1+e^x) - \frac{k}{2}\,x \\ (k+2)\log(1+e^x) - \frac{k+2}{2}\,x &= 0 \\ (k+2)\left\{\log(1+e^x) - \frac{x}{2}\right\} &= 0 \end{aligned}$$

すなわち，

$$(k+2)\,f(x) = 0$$

がすべての実数 x で成り立つ．

(1) より $f(0) = \log 2 \neq 0$ であるから，$f(x)$ は恒等的に 0 ではない．したがって，$k+2=0$，すなわち

$$k = -2$$

(3)　$g(u) = u(\log u)^2$（$u>0$）を u で微分すると，

$$g'(u) = (\log u)^2 + u\cdot 2\log u\cdot\frac{1}{u} = (\log u)^2 + 2\log u$$

(2) より $f''(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ であるから，$g(f''(x))$ は定義され，合成関数の微分法により，

$$\frac{d}{dx}\,g(f''(x)) = g'(f''(x))\cdot f'''(x) = \left\{(\log f''(x))^2 + 2\log f''(x)\right\} f'''(x)$$

$X = \log f''(x)$ とおくと，

$$\frac{d}{dx}\,g(f''(x)) = (X^2+2X)\,f'''(x)$$

$\dfrac{d}{dx}\,g(f''(x)) = h(X)\,f'''(x)$ と比較して，

$$h(X) = X^2 + 2X$$

(4)　(2) の結果 $\log f''(x) = -2f(x)$ より，$X = \log f''(x)$ とおくと，

$$f(x) = -\frac{1}{2}\,X$$

であるから，被積分関数は

$$\begin{aligned} \left(\{f(x)\}^2 - f(x)\right) f'''(x) &= \left(\frac{1}{4}\,X^2 + \frac{1}{2}\,X\right) f'''(x) \\ &= \frac{1}{4}\,(X^2+2X)\,f'''(x) = \frac{1}{4}\,h(X)\,f'''(x) \end{aligned}$$

と変形できる．ここで最後の等号には (3) の結果 $h(X) = X^2+2X$ を用いた．

(3) より $\dfrac{d}{dx}g(f''(x)) = h(X)\,f'''(x)$ であるから，

$$I = 36\int_0^{\log 2}\frac{1}{4}\,\frac{d}{dx}\,g(f''(x))\,dx = 9\big[g(f''(x))\big]_0^{\log 2}$$

$g(f''(x)) = f''(x)\,(\log f''(x))^2 = f''(x)\cdot X^2$ であり，$f''(x) = e^{-2f(x)}$，$X = -2f(x)$ を代入すると，

$$g(f''(x)) = e^{-2f(x)}\cdot 4\{f(x)\}^2 = 4\{f(x)\}^2\,e^{-2f(x)}$$

よって，

$$\begin{aligned} I &= 9\big[4\{f(x)\}^2\,e^{-2f(x)}\big]_0^{\log 2} = 36\big[\{f(x)\}^2\,e^{-2f(x)}\big]_0^{\log 2} \\ &= 36\Big\{\{f(\log 2)\}^2\,e^{-2f(\log 2)} - \{f(0)\}^2\,e^{-2f(0)}\Big\} \end{aligned}$$

$a = \log 2$，$b = \log 3$ とおいて，中カッコの中身を計算する．

$x = \log 2$ のとき：(1) より $f(\log 2) = b - \dfrac{a}{2}$ であり，

$$e^{-2f(\log 2)} = e^{-2(b-a/2)} = e^{a-2b} = e^a\cdot e^{-2b} = 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

よって，

$$\{f(\log 2)\}^2\,e^{-2f(\log 2)} = \left(b - \frac{a}{2}\right)^2\cdot\frac{2}{9} = \frac{2}{9}\left(b^2 - ab + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{2b^2}{9} - \frac{2ab}{9} + \frac{a^2}{18}$$

$x = 0$ のとき：(1) より $f(0) = a$ であり，

$$e^{-2f(0)} = e^{-2a} = (e^a)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

よって，

$$\{f(0)\}^2\,e^{-2f(0)} = a^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{a^2}{4}$$

以上より，

$$I = 36\left(\frac{2b^2}{9} - \frac{2ab}{9} + \frac{a^2}{18} - \frac{a^2}{4}\right) = 36\left(\frac{2b^2}{9} - \frac{2ab}{9} + \frac{2a^2 - 9a^2}{36}\right) = 8b^2 - 8ab - 7a^2$$

$I = Ab^2 + Bab + Ca^2$ と比較して，

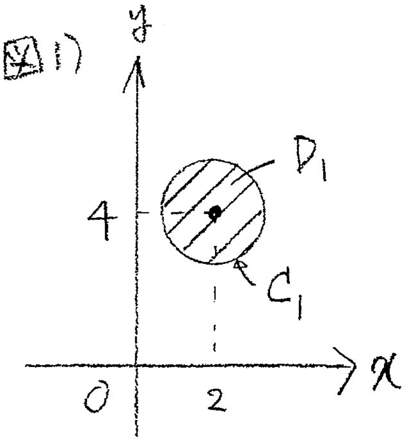
$$A = 8,\quad B = -8,\quad C = -7$$

［Ⅲ］ $x^2+y^2-4x-8y+18 \leqq 0 \iff (x-2)^2+(y-4)^2 \leqq 2$

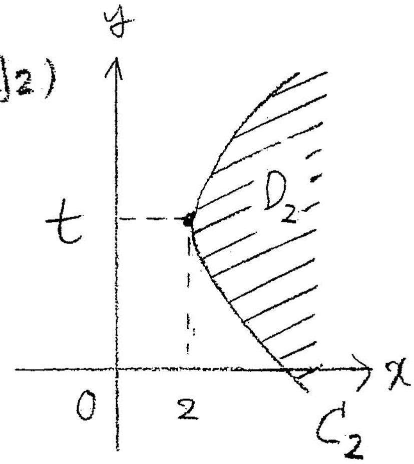
$y^2-4x-2ty+8+t^2 \leqq 0 \iff (y-t)^2 \leqq 4(x-2)$

より，D_1，D_2 はそれぞれ次図のような領域（境界を含む）である．

（図1）



（図2）



$(x-2)^2+(y-4)^2=2$，$(y-t)^2=4(x-2)$ で表される曲線をそれぞれ円 C_1，放物線 C_2 とする．また，l：$y=sx$ である．

(1)　直線 l と領域 D_1 がただ1つの共有点をもつための条件は，直線 l と円 C_1 がただ1つの共有点をもつ…①ことである．l，C_1 の方程式から y を消去して，

$$(x-2)^2+(sx-4)^2=2$$

$$\therefore (s^2+1)x^2-4(2s+1)x+18=0 \quad \cdots②$$

を得る．①となるための条件は，x の2次方程式②の判別式が0であること，すなわち

$$\{2(2s+1)\}^2-18(s^2+1)=0$$

$$s^2-8s+7=0$$

$$(s-1)(s-7)=0 \qquad \therefore s=1,7 \quad (s>0 \text{ を満たす})$$

である．②の判別式が 0 であるとき，②の重解は $x=\dfrac{2(2s+1)}{s^2+1}$ なので　$s=1$，$s=7$ のときの②の重解はそれぞれ $x=3$，$x=\dfrac{3}{5}$ であり，これらに対する $y(=sx)$ の値はそれぞれ $y=3$，$y=\dfrac{21}{5}$ である．

以上より求める s の値，共有点の座標は

$s=1$，$(3,3)$　または　$s=7$，$\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{21}{5}\right)$

となる．

(2)　(1) と同様に，l，C_2 の方程式から x を消去して得られる y の 2 次方程式

$$(y-t)^2=4\left(\frac{y}{s}-2\right)$$

$$\therefore\ y^2-2\left(\frac{2}{s}+t\right)y+t^2+8=0$$

の判別式が 0 であることから，

$$\left(\frac{2}{s}+t\right)^2-(t^2+8)=0$$

$$\therefore\ 2s^2-ts-1=0$$

となる．これと $s>0$ より $s=\dfrac{t+\sqrt{t^2+8}}{4}$ となる．

(3)

$$(\mathrm{i})\iff\begin{cases}a-b\geqq 0\\ a+b\leqq a-b\end{cases}\ \text{または}\ \begin{cases}a-b\leqq 0\\ a+b\leqq b-a\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}b\leqq a\\ b\leqq 0\end{cases}\ \text{または}\ \begin{cases}b\geqq a\\ a\leqq 0\end{cases}$$

より，これを満たす点 (a,b) の集合は（図3）の斜線部

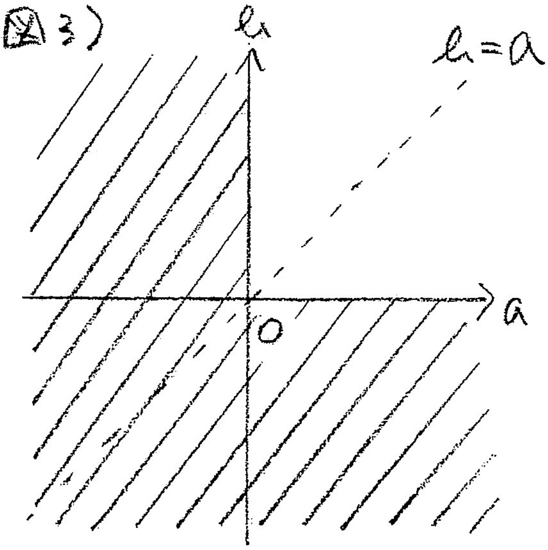
(境界を含む)となり，これより

(i) $\iff a \leqq 0$ または $b \leqq 0$

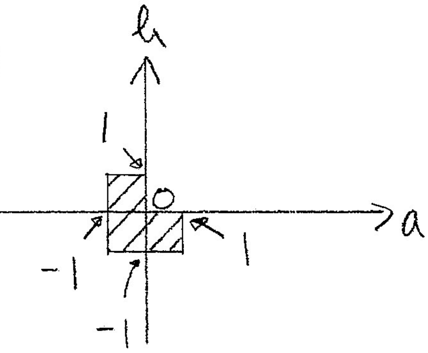
であることがわかる…③.

さらに条件(ii),(iii)もふまえると，(i),(ii),(iii)を同時に満たす点$(a,\ b)$の集合は(図4)の斜線部(境界を含む)となり，よって求める面積は3である.

(図3)



(図4)



(4) ③より，

$$x^2+2y^2-8x-(8+2t)y+26+t^2 \leqq |x^2-(8-2t)y+10-t^2|$$

$$\iff (x^2+y^2-4x-8y+18)+(y^2-4x-2ty+8+t^2)$$
$$\leqq |(x^2+y^2-4x-8y+18)-(y^2-4x-2ty+8+t^2)|$$

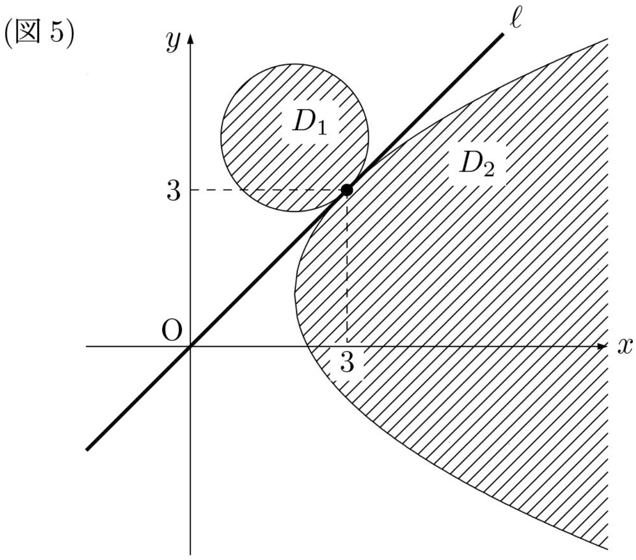
$\iff x^2+y^2-4x-8y+18 \leqq 0$ または $y^2-4x-2ty+8+t^2 \leqq 0$

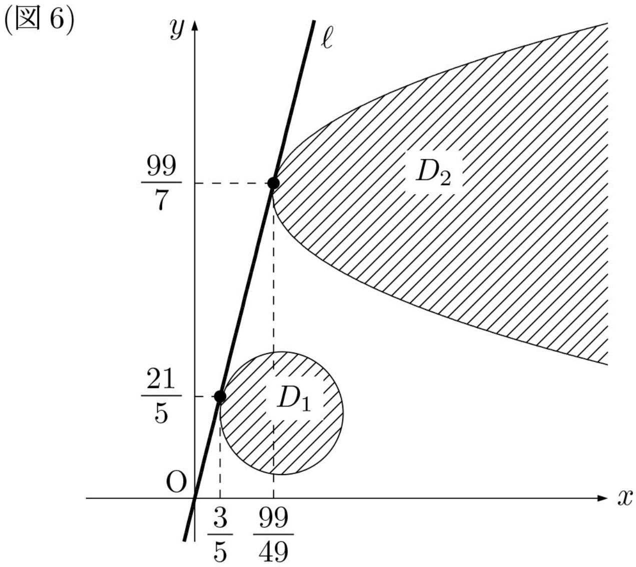
であるから，領域Eとは領域D_1または領域D_2に属する点$(x,\ y)$の集合を指す. よって(図1)および(図2)をふまえると，lとEが共有点をちょうど2つもつ…④ためにはlとD_1がただ1つの共有点をもつ $\therefore\ s=1$ または $s=7$ であることが必要である.

$s=1$, $s=7$のとき，(2)の結果からそれぞれ $t=1$, $t=\dfrac{97}{7}$ となる. $(s,t)=(1,1)$, $(s,t)=\left(7,\ \dfrac{97}{7}\right)$ のときの D_1, D_2 はそ

れぞれ（図5），（図6）のようになり，これらから（図5）のときは④を満たさないが，（図6）のときは④を満たすことがわかる．

以上より求める s, t の値の組は $(s, t) = \left(7, \dfrac{97}{7}\right)$ となる．





〔Ⅳ〕　n は自然数とする．

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{a_n}{n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$b_1=0,\ b_2=1,\ b_{n+2}=b_{n+1}+\frac{b_n}{n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$c_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 x^n e^x\,dx$$

$d_n=(-1)^n(p\,a_n+q\,b_n)$（$p$, q は 0 でない実数）

(1)

$$a_3=a_2+\frac{a_1}{1}=2+\frac{1}{1}=3$$

$$a_4=a_3+\frac{a_2}{2}=3+\frac{2}{2}=4$$

$$b_3=b_2+\frac{b_1}{1}=1+\frac{0}{1}=1$$

$$c_1=\frac{1}{0!}\int_0^1 xe^x\,dx=\Big[\,(x-1)e^x\,\Big]_0^1=1$$

$$c_2=\frac{1}{1!}\int_0^1 x^2e^x\,dx=\Big[\,(x^2-2x+2)e^x\,\Big]_0^1=e-2$$

(2)　$0<x<1$ において　$1<e^x<e$　より　$0<x^ne^x<ex^n$　が成り立つから

$$0<\int_0^1 x^ne^x\,dx<\int_0^1 ex^n\,dx$$

も成り立つ．各辺を $(n-1)!$ で割って

$$0<\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 x^ne^x\,dx<\frac{e}{(n-1)!}\int_0^1 x^n\,dx$$

ここで　$\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$

ゆえに　$\displaystyle 0<c_n<\frac{e}{(n+1)\cdot(n-1)!}$

このとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e}{(n+1)\cdot(n-1)!}=0$

よって，はさみうちの原理を用いて　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=0$

(3)　部分積分法を用いて

$$\begin{aligned}
c_{n+1}&=\frac{1}{n!}\int_0^1 x^{n+1}e^x\,dx\\
&=\frac{1}{n!}\left\{\Big[\,x^{n+1}e^x\,\Big]_0^1-(n+1)\int_0^1 x^ne^x\,dx\right\}\\
&=\frac{1}{n!}\{e-(n+1)\cdot(n-1)!c_n\}\\
&=\frac{e}{n!}-\frac{n+1}{n}c_n
\end{aligned}$$

ゆえに　$\displaystyle c_{n+1}+\frac{n+1}{n}c_n=\frac{e}{n!}$

よって　$\displaystyle c_{n+1}+\frac{n+1}{n}c_n=\frac{k}{n!}$　を満たす定数 k の値は　$k=e$

これを用いて

$$\begin{aligned} c_{n+2}+\frac{n+2}{n+1}c_{n+1} &= \frac{e}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{e}{n!} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(c_{n+1}+\frac{n+1}{n}c_n\right) \\ &= \frac{1}{n+1}c_{n+1}+\frac{1}{n}c_n \end{aligned}$$

ゆえに　$c_{n+2}+c_{n+1}=\dfrac{1}{n}c_n$

$c_{n+2}+c_{n+1}=r_nc_n$ を満たす r_n は $c_n>0$ より

$$r_n=\frac{c_{n+2}+c_{n+1}}{c_n}$$

と一意に定まる．

よって　$r_n=\dfrac{1}{n}$

(4)

$$d_{n+1}=(-1)^{n+1}(p\,a_{n+1}+q\,b_{n+1})$$

$$\begin{aligned} d_{n+2} &= (-1)^{n+2}(p\,a_{n+2}+q\,b_{n+2}) \\ &= (-1)^{n+2}\left\{p\left(a_{n+1}+\frac{a_n}{n}\right)+q\left(b_{n+1}+\frac{b_n}{n}\right)\right\} \\ &= -(-1)^{n+1}(pa_{n+1}+qb_{n+1})+\frac{1}{n}\cdot(-1)^n(pa_n+qb_n) \\ &= -d_{n+1}+\frac{1}{n}d_n \end{aligned}$$

ゆえに　$d_{n+2}+d_{n+1}=\dfrac{1}{n}d_n$

$d_{n+2}+d_{n+1}=s_nd_n$ を満たす s_n は　$s_n=\dfrac{1}{n}$

(5)　$a_n=n$，$a_{n+1}=n+1$ と仮定すると

$$a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{a_n}{n}=n+1+\frac{n}{n}=n+2$$

$a_1=1$，$a_2=2$ から帰納的に　$a_n=n$

$d_1=c_1$ かつ $d_2=c_2$　とすると　$-p=1$ かつ $2p+q=e-2$

$$\therefore\ p=-1,\ q=e$$

このとき，(3) と (4) の漸化式を考えて　$c_n=d_n=(-1)^n(-n+eb_n)$

すなわち　$b_n=\dfrac{c_n}{e(-1)^n}+\dfrac{n}{e}$

これより

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n) &= \lim_{n\to\infty}(b_{n+2}-b_{n+1})\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{c_n}{e(-1)^n}+\frac{n}{e}\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{e}\cdot\frac{c_n}{(-1)^n n}+\frac{1}{e}\right\}\end{aligned}$$

ここで　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{(-1)^n n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n} = 0$

ゆえに　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{(-1)^n n} = 0$

よって　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n) = \frac{1}{e}$