2026 同志社大学（2/7 実施　文化情報（理系）・生命医科・スポーツ健康科（理系））

数学（理系）　解答例

〔I〕

(1) $\boxed{\text{ア}}$ $\dfrac{1}{165}$　$\boxed{\text{イ}}$ $\dfrac{2}{495}$　$\boxed{\text{ウ}}$ $\dfrac{2}{55}$　$\boxed{\text{エ}}$ $3n+6$　$\boxed{\text{オ}}$ $\dfrac{4}{27}$

(2) $\boxed{\text{カ}}$ $\sqrt{3}$　$\boxed{\text{キ}}$ 5　$\boxed{\text{ク}}$ 2　$\boxed{\text{ケ}}$ $2\sqrt{13}$　$\boxed{\text{コ}}$ $2\sqrt{7}+5$

■解説□

(1)　1 から 12 までの整数から 4 数 X_1，X_2，X_3，X_4（$X_1 < X_2 < X_3 < X_4$）を選ぶ方法は ${}_{12}\mathrm{C}_4 = 495$ 通りだけある．

$\boxed{\text{ア}}$　X_1，X_2，X_3，X_4 が公差 3 の等差数列となるようなこれらの組は

$$(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4) = (1,\ 4,\ 7,\ 10),\ (2,\ 5,\ 8,\ 11),\ (3,\ 6,\ 9,\ 12)$$

の 3 個だけある．よって求める確率は $\dfrac{3}{495} = \mathbf{\dfrac{1}{165}}$ である．

$\boxed{\text{イ}}$　$\boxed{\text{ア}}$と同様に考える．$X_1(=5)$，X_2，X_3，X_4 が等差数列となるようなこれらの組は

$$(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4) = (5,\ 6,\ 7,\ 8),\ (5,\ 7,\ 9,\ 11)$$

の 2 個だけある．よって求める確率は $\mathbf{\dfrac{2}{495}}$ である．

$\boxed{\text{ウ}}$　$\boxed{\text{ア}}$と同様に考える．X_1，X_2，X_3，X_4 が公差 d（$d \geqq 4$）の等差数列となると仮定すると，$X_1 \geqq 1$ であることもふまえ，

$$\begin{aligned} X_4 &= X_1 + 3d \\ &\geqq 1 + 3 \cdot 4 = 13 \end{aligned}$$

となり，これは $n=4$ のとき $X_4 \leqq 3 \cdot 4 (=12)$ であることと矛盾する．これと $X_1 < X_2 < X_3 < X_4$ であることをふまえると，公差は 1 または 2 または 3 であることが必要となる．

　X_1，X_2，X_3，X_4 が公差 1 の等差数列となるようなこれらの組は

$$(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4) = (1,\ 2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5), \cdots,\ (9,\ 10,\ 11,\ 12)$$

の 9 個だけあり，公差 2 の等差数列となるようなこれらの組は

$$(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4) = (1,\ 3,\ 5,\ 7),\ (2,\ 4,\ 6,\ 8), \cdots,\ (6,\ 8,\ 10,\ 12)$$

の 6 個だけある．$\boxed{\text{ア}}$で求めた 3 個の存在もふまえると，X_1，X_2，X_3，X_4 が等差数列となるようなこれらの組は計 $9+6+3=18$ 個だけある．よって求める確率は $\dfrac{18}{495} = \mathbf{\dfrac{2}{55}}$ である．

$\boxed{\text{エ}}$　1 から $3n$ までの整数から n 個の数 X_1，X_2，$\cdots$，X_n （$X_1 < X_2 < \cdots < X_n$）を選ぶ方法は ${}_{3n}\mathrm{C}_n$ 通りだけある．

　$\boxed{\text{ウ}}$と同様に背理法を用いると，本問においても公差は 1 または 2 または 3 であることが必要だとわかる．

X_1，X_2，$\cdots$，X_n が公差 1 および 2 および 3 の等差数列となるようなこれらの組は，それぞれ

$$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n) = (1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ (2,\ 3,\cdots,\ n+1),\cdots,\ (2n+1,\ 2n+2,\ \cdots,\ 3n)$$

および

$$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n) = (1,\ 3,\ \cdots,\ 2n-1),\ (2,\ 4,\cdots,\ 2n),\cdots,\ (n+2,\ n+4,\ \cdots,\ 3n)$$

および

$$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n) = (1,\ 4,\ \cdots,\ 3n-2),\ (2,\ 5,\cdots,\ 3n-1),\ (3,\ 6,\ \cdots,\ 3n)$$

の計 $(2n+1)+(n+2)+3 = 3n+6$ 個だけある．よって求める確率は $\boldsymbol{\dfrac{3n+6}{{}_{3n}\mathrm{C}_n}}$ である．

$\boxed{オ}$　$\boxed{エ}$の結果から，

$$\begin{aligned}
\frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{3(n+1)+6}{{}_{3(n+1)}\mathrm{C}_{n+1}} \cdot \frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{3n+6} \\
&= \frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{(n+1)!(2n+2)!(3n)!}{(3n+3)!n!(2n)!} \\
&= \frac{(n+3)(n+1)(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \\
&= \frac{(1+\frac{3}{n})(1+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})}{(1+\frac{2}{n})(3+\frac{3}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{1}{n})}
\end{aligned}$$

となるから，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot 2}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 3} \\
&= \boldsymbol{\frac{4}{27}}
\end{aligned}$$

である．

(2)
$\boxed{カ}\boxed{キ}\boxed{ク}$　式 $x^2-5xy+7y^2 = 3(X^2+Y^2)$ を X，Y の式に変形すると，

$$(aX+bY)^2 - 5(aX+bY)\cdot cY + 7(cY)^2 = 3(X^2+Y^2)$$

$$\therefore\ a^2X^2 + \{(2ab-5ac)Y\}X + (b^2-5bc+7c^2)Y^2 = 3X^2+3Y^2 \cdots ①$$

となる．

①が X, Y についての恒等式となる

$$\iff ①\text{があらゆる } X,\ Y \text{ に対して成り立つ}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 = 3 \\ (2ab - 5ac)Y = 0 \\ (b^2 - 5bc + 7c^2)Y^2 = 3Y^2 \end{cases} \quad \text{があらゆる } Y \text{ に対して成り立つ}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 = 3 \cdots ② \\ 2ab - 5ac = 0 \cdots ③ \\ b^2 - 5bc + 7c^2 = 3 \cdots ④ \end{cases}$$

である．

② かつ $a > 0$ より $a = \sqrt{3}$ となる．これと ③ より $c = \frac{2}{5}b \cdots ⑤$ が得られ，これと ④ かつ $b > 0$ より

$$b^2 - 5b \cdot \frac{2}{5}b + 7\left(\frac{2}{5}b\right)^2 = 3$$

$$b^2 = 25 \qquad \therefore b = 5$$

となり，さらに ⑤ より $c = 2$ となる．よって求める $a,\ b,\ c$ の値は $(a,\ b,\ c) = (\boldsymbol{\sqrt{3}},\ \mathbf{5},\ \mathbf{2})$ である．

$\boxed{ケ}\boxed{コ}$

$$\begin{aligned} x^2 - 5xy + 7y^2 = 3 &\iff 3(X^2 + Y^2) = 3 \\ &\iff X^2 + Y^2 = 1 \end{aligned}$$

であり，これより $(X,\ Y) = (\cos\theta,\ \sin\theta)$ （θ は任意の実数）とおける．

$\boxed{カ}$，$\boxed{キ}$，$\boxed{ク}$の結果から，

$$\begin{aligned} x + y &= \left(\sqrt{3}X + 5Y\right) + 2Y = 7Y + \sqrt{3}X \\ &= 7\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \\ &= \sqrt{7^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}\sin(\theta + \alpha) = 2\sqrt{13}\sin(\theta + \alpha), \\ xy &= \left(\sqrt{3}X + 5Y\right) \cdot 2Y = 2\sqrt{3}XY + 10Y^2 \\ &= 2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta + 10\sin^2\theta \\ &= \sqrt{3}\sin 2\theta + 10 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= \sqrt{3}\sin 2\theta - 5\cos 2\theta + 5 \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-5)^2}\sin(2\theta + \beta) + 5 = 2\sqrt{7}\sin(2\theta + \beta) + 5 \end{aligned}$$

となる．ただし，α は $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$，$\cos\alpha = \frac{7}{2\sqrt{13}}$，$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数，β は $\sin\beta = -\frac{5}{2\sqrt{7}}$，$\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$，$-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ を満たす実数である．θ が任意の実数値をとって動くこともふまえ，$x+y$，xy の最大値はそれぞれ $\boldsymbol{2\sqrt{13}}$，$\boldsymbol{2\sqrt{7} + 5}$ となる．

〔Ⅱ〕

■解答例□

(1)　$f(0)=2\displaystyle\int_0^0 \big(tf(t)+t^3\big)dt+1=1$

$g(0)=f(0)e^0=1\cdot 1=1$

(2)　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \big(tf(t)+t^3\big)dt=xf(x)+x^3$ より，

$f'(x)=2xf(x)+2x^3$

(3)　(2) より，

$$\begin{aligned} g'(x)&=f'(x)e^{-x^2}+f(x)e^{-x^2}(-2x)\\ &=\{2xf(x)+2x^3-2xf(x)\}e^{-x^2}\\ &=2x^3e^{-x^2}\end{aligned}$$

(4)　$h'(x)=2xe^{-x^2}+(x^2+1)e^{-x^2}(-2x)=-2x^3e^{-x^2}$

(5)　(3)，(4) より，

$g'(x)=-h'(x)$

両辺を x で積分することにより，

$g(x)=-h(x)+C$（C は積分定数）

両辺に $x=0$ を代入すると

$g(0)=-h(0)+C$

$1=-1+C$

$C=2$

となるから，

$g(x)=-h(x)+2=-(x^2+1)e^{-x^2}+2$

$g(x)=f(x)e^{-x^2}$ より，

$f(x)=g(x)e^{x^2}=-(x^2+1)+2e^{x^2}$

［Ⅲ］

■ 解答例 □

(1)　曲線 $C : y = -ax^2$ 上の点 $(t,\ -at^2)$ における接線の式は, $y' = -2ax$ より,

$$y = -2at(x - t) - at^2 = -2atx + at^2$$

よって,

傾き：$\underset{\sim\sim\sim}{-2at}$,　y 切片：$\underset{\sim\sim}{at^2}$

(2)　接線 $y = -2atx + at^2$ が点 A $\left(a,\ a + \dfrac{1}{4a}\right)$ を通るとき,

$$a + \frac{1}{4a} = -2at \cdot a + at^2$$

$$a + \frac{1}{4a} = -2a^2t + at^2$$

$$4a^2 + 1 = -8a^3t + 4a^2t^2$$

$$4a^2t^2 - 8a^3t - (4a^2 + 1) = 0$$

この t の 2 次方程式を解の公式で解くと,

$$\begin{aligned} t &= \frac{8a^3 \pm \sqrt{64a^6 + 16a^2(4a^2 + 1)}}{8a^2} \\ &= \frac{8a^3 \pm \sqrt{16a^2(2a^2 + 1)^2}}{8a^2} \\ &= \frac{8a^3 \pm 4a(2a^2 + 1)}{8a^2} \\ &= \frac{2a^2 \pm (2a^2 + 1)}{2a} \\ &= \frac{4a^2 + 1}{2a},\ \frac{-1}{2a} \\ &= 2a + \frac{1}{2a},\ -\frac{1}{2a} \end{aligned}$$

よって, それぞれの点における接線の傾き $(-2at)$ を求めると,

$t = -\dfrac{1}{2a}$ のとき，傾き：$-2a\left(-\dfrac{1}{2a}\right) = 1$

$t = 2a + \dfrac{1}{2a}$ のとき，傾き：$-2a\left(2a + \dfrac{1}{2a}\right) = -4a^2 - 1$

傾きが正の接線が ℓ_1 であるから,

ℓ_1 の傾き：$\underset{\sim}{1}$，ℓ_2 の傾き：$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{-4a^2 - 1}$

(3)　(2) の結果より, 点 P の x 座標が $-\dfrac{1}{2a}$ であり, 点 Q の x 座標が $2a+\dfrac{1}{2a}$ であるから, それぞれの座標を求めると

$$-a\left(-\frac{1}{2a}\right)^2=-\frac{1}{4a} \qquad \therefore\ \mathrm{P}\left(-\frac{1}{2a},\ -\frac{1}{4a}\right)$$

$$-a\left(2a+\frac{1}{2a}\right)^2=-a\left(\frac{4a^2+1}{2a}\right)^2=-\frac{(4a^2+1)^2}{4a} \qquad \therefore\ \mathrm{Q}\left(2a+\frac{1}{2a},\ -\frac{(4a^2+1)^2}{4a}\right)$$

よって, 直線 m_1 の式は,

$$y=(-1)\cdot\left\{x-\left(-\frac{1}{2a}\right)\right\}-\frac{1}{4a}=-x-\frac{1}{2a}-\frac{1}{4a}=-x-\frac{3}{4a}$$

$a=a_0$ のとき, 直線 m_1 が点 Q を通るので,

$$-\frac{(4{a_0}^2+1)^2}{4a_0}=-\left(2a_0+\frac{1}{2a_0}\right)-\frac{3}{4a_0}$$

$$-\frac{(4{a_0}^2+1)^2}{4a_0}=-\frac{4{a_0}^2+1}{2a_0}-\frac{3}{4a_0}$$

$$(4{a_0}^2+1)^2-2(4{a_0}^2+1)-3=0$$

ここで, $X=4{a_0}^2+1$ とおくと $X>1$ であるから,

$$X^2-2X-3=0$$

$$(X-3)(X+1)=0$$

$$\therefore\ X=3$$

よって, $4{a_0}^2+1=3$ より ${a_0}^2=\dfrac{1}{2}$ であり, $a_0>0$ より, 求める a_0 の値は,

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(4)　$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときの, 点 P, Q の座標と直線 m_1, m_2 の式を求めると,

$$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{4}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\ -\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$m_1: y=-x-\frac{3\sqrt{2}}{4},\ m_2: y=\frac{1}{3}x-\frac{11\sqrt{2}}{4}$$

また, 直線 m_2 と C との共有点で Q 以外の点を R とすると, R の x 座標は,

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2=\frac{1}{3}x-\frac{11\sqrt{2}}{4}$$

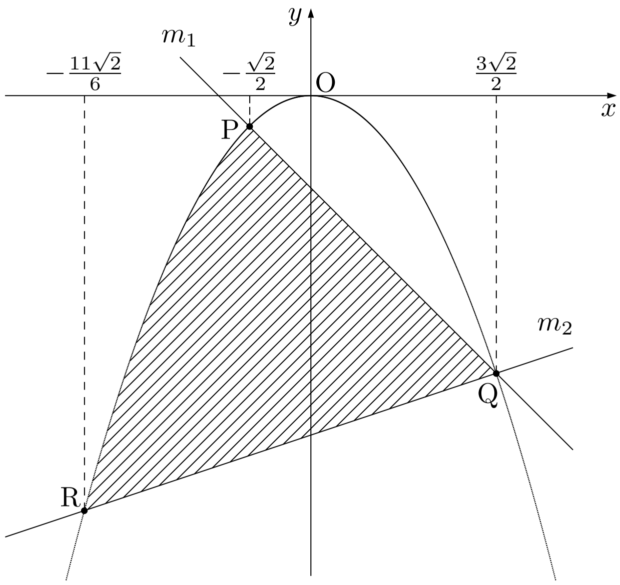
$$x^2+\frac{\sqrt{2}}{3}x-\frac{11}{2}=0$$

$$\left(x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{11}{3\sqrt{2}}\right)=0$$

$$x=\frac{3\sqrt{2}}{2},\ -\frac{11}{3\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ x=-\frac{11}{3\sqrt{2}}=-\frac{11\sqrt{2}}{6}$$

よって, 求める面積は下図の斜線部分の面積であり, その面積は,



$$\int_{-\frac{11\sqrt{2}}{6}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \left(\frac{1}{3}x - \frac{11\sqrt{2}}{4}\right)\right\} dx$$

$$- \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \left(-x - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\right\} dx$$

$$= \int_{-\frac{11\sqrt{2}}{6}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + \frac{11\sqrt{2}}{6}\right)\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\right\} dx$$

$$- \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\right\} dx$$

$$= -\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{6}\left\{\frac{3\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{11\sqrt{2}}{6}\right)\right\}^3 + \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{6}\left\{\frac{3\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}^3$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{10\sqrt{2}}{3}\right)^3 - \frac{\sqrt{2}}{12}(2\sqrt{2})^3$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{2000\sqrt{2}}{27} - 16\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{1568\sqrt{2}}{27}$$

$$= \frac{784}{81}$$

〔IV〕 ■解答例□

(1)　$c_n = a_n - b_n$ の定義と漸化式より，

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_{n+1} - b_{n+1} \\ &= \left(\frac{3}{2}a_n - b_n\right) - \left(a_n - \frac{1}{2}b_n\right) \\ &= \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}b_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n) = \frac{1}{2}c_n \end{aligned}$$

$c_1 = a_1 - b_1 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} = 1$ であるから，数列 $\{c_n\}$ は，初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．よって，

$$c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2)　$a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n - b_n$ より $b_n = \dfrac{3}{2}a_n - a_{n+1}$ であるから，

$$c_n = a_n - b_n = a_n - \left(\frac{3}{2}a_n - a_{n+1}\right) = a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n$$

この両辺に 2^{n+1} をかけて，(1) の結果を用いると，

$$2^{n+1}a_{n+1} - 2^n a_n = 2^{n+1}c_n = 2^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4$$

(3)　$\alpha_n = 2^n a_n$ とおくと，(2) の結果より，

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = 2^{n+1}a_{n+1} - 2^n a_n = 4$$

であるから，$\{\alpha_n\}$ は公差 4 の等差数列である．$\alpha_1 = 2a_1 = 5$ より，

$$\alpha_n = 5 + 4(n-1) = 4n + 1$$

したがって，$2^n a_n = 4n + 1$ より，

$$a_n = \frac{4n+1}{2^n}$$

また，$b_n = a_n - c_n$ より，

$$b_n = \frac{4n+1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{4n+1}{2^n} - \frac{2}{2^n} = \frac{4n-1}{2^n}$$

(4)　(3) の結果より，

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{4n+1}{4n-1} = 1 + \frac{2}{4n-1}$$

であるから，

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^n = \left(1 + \frac{2}{4n-1}\right)^n$$

ここで $t_n = \dfrac{4n-1}{2}$ とおくと，$t_n > 0$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ であり，$\dfrac{2}{4n-1} = \dfrac{1}{t_n}$，$n = \dfrac{2\,t_n+1}{4}$ が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^n &= \left(1+\frac{1}{t_n}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{\frac{2\,t_n+1}{4}} \\ &= \left\{\left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

問題文で与えられた結果より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n} = e$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^n = e^{\frac{1}{2}}\cdot 1 = \sqrt{e}$$