［ I ］

(1) $\boxed{ア}$ $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$　$\boxed{イ}$ $1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$　$\boxed{ウ}$ $\dfrac{1}{27}$　$\boxed{エ}$ $\dfrac{31}{108}$　$\boxed{オ}$ $\dfrac{248}{311}$

(2) $\boxed{カ}$ $-\dfrac{i}{2}$　$\boxed{キ}$ $\dfrac{1}{2}$　$\boxed{ク}$ $-\dfrac{1}{4}$　$\boxed{ケ}$ $\dfrac{1}{4}$　$\boxed{コ}$ 90°

■ 解説 □

(1) $a_k = X_k - 4$ とおくと，a_k は $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ の各値を確率 $\dfrac{1}{6}$ でとる．

$\boxed{ア}$ $|Y_n| = |a_1|\cdot|a_2|\cdot\cdots\cdot|a_n|$ である．$|a_k|$ のとりうる値は 0, 1, 2, 3 であるから，$|Y_n| = 1$ となるための条件は，すべての k で $|a_k| = 1$ であることである．

$|a_k| = 1$ となるための条件は，「$X_k = 3$ または $X_k = 5$」であり，その確率は $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ である．各回の試行は独立であるから，

$$P(|Y_n| = 1) = \underset{\sim\sim\sim}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$\boxed{イ}$ $Y_n = 0$ となるための条件は，a_1，a_2，$\cdots$，a_n のうち少なくとも 1 つが 0（すなわち少なくとも 1 つの k で $X_k = 4$）であることである．

余事象「すべての k で $X_k \neq 4$」の確率は $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ であるから，

$$P(Y_n = 0) = \underset{\sim\sim\sim}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

以下，$n = 4$ とする．

$\boxed{ウ}$ $Y_4 = a_1a_2a_3a_4 = 6$ であるから，a_1，a_2，a_3，a_4 はすべて 0 でない．$|a_k|$ のとりうる値は 1，2，3 に限られ，$|a_1|\cdot|a_2|\cdot|a_3|\cdot|a_4| = 6$ を満たす $|a_k|$ の値の組合せは $\{3, 2, 1, 1\}$ のみである．

$|a_k| = 3$ となる条件は「$a_k = -3$」（1 通り）であり，$|a_k| = 2$ となる条件は「$a_k = \pm 2$」（2 通り），$|a_k| = 1$ となる条件は「$a_k = \pm 1$」（2 通り）である．

$|a_1|$，$|a_2|$，$|a_3|$，$|a_4|$ に絶対値 $\{3, 2, 1, 1\}$ を割り当てる順列は $\dfrac{4!}{2!} = 12$ 通りである．

次に符号を考える．$a_k = -3$ は負で確定しているから，全体の積が正（$= 6$）になるための条件は，残り 3 つの a_k の積が負であることである．このとき，残り 3 つのうち負のものの個数が奇数（1 個または 3 個）であり，その場合の数は ${}_3\mathrm{C}_1 + {}_3\mathrm{C}_3 = 4$ 通りである．

よって，$Y_4 = 6$ となる場合の数は $12 \times 4 = 48$ 通りであり，

$$P(Y_4 = 6) = \frac{48}{6^4} = \frac{48}{1296} = \underset{\sim}{\frac{1}{27}}$$

$\boxed{\text{エ}}$ $Z_3 = a_1a_2a_3$ である．$Z_3 > 0$ となるための条件は，a_1，a_2，a_3 がすべて 0 でなく，かつそのうち負のものの個数が偶数（0 個または 2 個）であることである．

各 a_k について，$P(a_k > 0) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$，$P(a_k < 0) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$，$P(a_k = 0) = \dfrac{1}{6}$ である．

負のものが 0 個（3 つとも正）の確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$，負のものが 2 個で正が 1 個の確率は ${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{4}$ であるから，

$$P(Z_3 > 0) = \frac{1}{27} + \frac{1}{4} = \frac{4+27}{108} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{31}{108}}$$

$\boxed{\text{オ}}$ $Y_4 = Z_3 \cdot a_4 = Z_3(X_4 - 4)$ であるから，

$$\begin{aligned} Z_3 > Y_4 &\iff Z_3 - Z_3(X_4 - 4) > 0 \\ &\iff Z_3(5 - X_4) > 0 \\ &\iff Z_3(X_4 - 5) < 0 \\ &\iff (X_1 - 4)(X_2 - 4)(X_3 - 4)(X_4 - 5) < 0 \quad \cdots\cdots(*) \end{aligned}$$

すなわち，$Z_3 > Y_4$ となるための条件は，Z_3 と $(X_4 - 5)$ が異符号であることである．
$X_4 - 5$ の符号で場合を分ける．

(i) $X_4 = 6$ のとき $\left(\text{確率}\dfrac{1}{6}\right)$：$X_4 - 5 = 1 > 0$ であるから，$Z_3 < 0$ である．

(ii) $X_4 = 5$ のとき $\left(\text{確率}\dfrac{1}{6}\right)$：$X_4 - 5 = 0$ となり，$(*)$ の左辺は 0 だから成り立たない．

(iii) $X_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $\left(\text{確率}\dfrac{2}{3}\right)$：$X_4 - 5 < 0$ であるから，$Z_3 > 0$ である．

$P(Z_3 < 0)$ を求める．$Z_3 < 0$ となるための条件は，a_1，a_2，a_3 がすべて 0 でなく，かつそのうち負のものの個数が奇数（1 個または 3 個）であることである．負のものが 1 個で正が 2 個の確率は ${}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{6}$，負のものが 3 個の確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$ であるから，$P(Z_3 < 0) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{24}$ である．

ここで，事象 A を「$Z_3 > Y_4$」，事象 B を「$Z_3 > 0$」と定めると，

$$P(A) = \frac{1}{6}\cdot\frac{7}{24} + \frac{2}{3}\cdot\frac{31}{108} = \frac{7}{144} + \frac{31}{162} = \frac{63}{1296} + \frac{248}{1296} = \frac{311}{1296}$$

A かつ B が成り立つのは (iii) のみであるから，

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3}\cdot\frac{31}{108} = \frac{31}{162} = \frac{248}{1296}$$

よって，求める条件付き確率は，

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{248}{1296}}{\frac{311}{1296}} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{248}{311}}$$

(2) $\boxed{\text{カ}}$ $\boxed{\text{キ}}$ 点 z が原点と点 $2i$ を結ぶ線分の垂直二等分線上にある条件は

$$|z| = |z - 2i|$$

である．$w = \dfrac{1}{z}$ より $z = \dfrac{1}{w}$ であるから，これを代入すると，

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{1}{w} - 2i\right|$$

$w \neq 0$ のもとで，両辺に $|w|$ をかけると，

$$1 = |1 - 2iw|$$

両辺を $|2i| = 2$ で割ると，

$$\left|w - \frac{1}{2i}\right| = \frac{1}{2}$$

$\dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2}$ であるから，

$$\left|w - \left(-\frac{i}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}$$

$w = 0$ はこの円上にあるが，今 $w \neq 0$ であるから，点 w が描く図形には点 0 が含まれない．

よって，C_1 は点 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{i}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円から原点を除いた曲線である．

$\boxed{\text{ク}}$ $\boxed{\text{ケ}}$ 点 z が点 -2 を通り実軸に垂直な直線上を動く条件は $\mathrm{Re}\,(z) = -2$ であるが，この直線は 2 点 0，-4 を結ぶ線分の垂直二等分線であるから，

$$|z| = |z + 4|$$

と表せる．$z = \dfrac{1}{w}$ を代入すると，

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{1}{w} + 4\right|$$

$w \neq 0$ のもとで，両辺に $|w|$ をかけると，

$$1 = |1 + 4w|$$

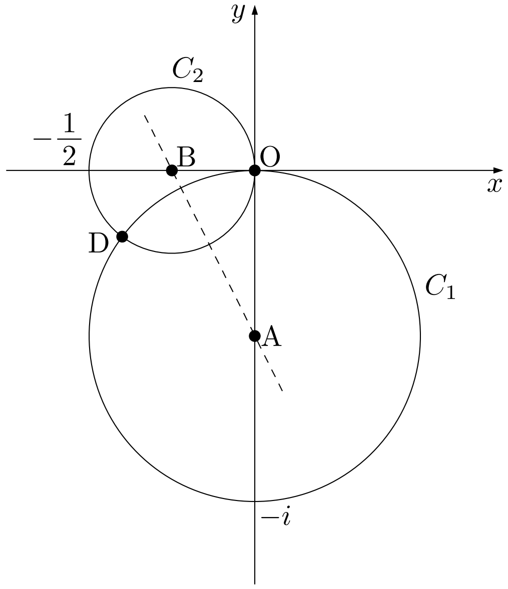
両辺を $|4| = 4$ で割ると，

$$\left|w + \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} \qquad \text{すなわち} \qquad \left|w - \left(-\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{1}{4}$$

$w = 0$ はこの円上にあるが，今 $w \neq 0$ であるから，点 w が描く図形には点 0 が含まれない．

よって，C_2 は点 $\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{4}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{4}$ の円から原点を除いた曲線である．

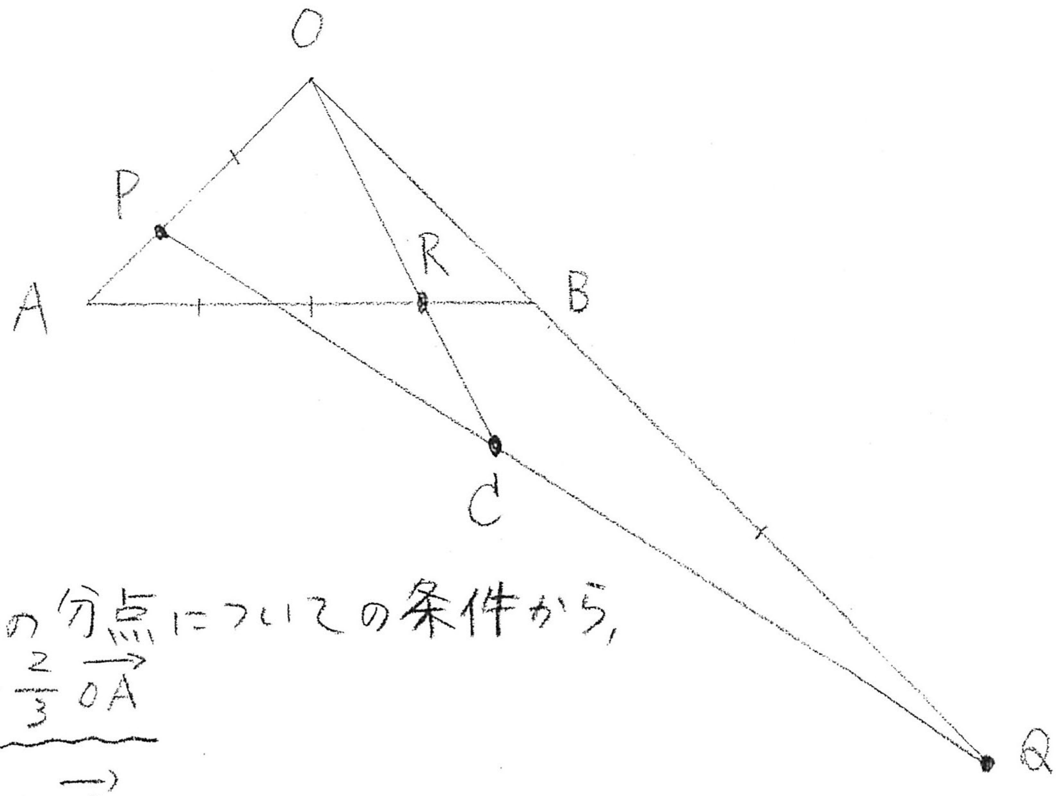
$\boxed{\text{コ}}$ 曲線 C_1 と曲線 C_2 を図示すると，以下の図のようになる（ただし，点 0 は除く）．



C_1 と点 0 を含む円と C_2 と点 0 を含む円は異なる 2 点で交わり，その 2 つの交点が点 0 と点 D である．2 つの円はともに直線 AB に関して対称であるから，点 0 と点 D も直線 AB に関して対称である．したがって AO = AD，BO = BD が成り立ち，

$$\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{AOB} = \underset{\sim\sim}{90}°$$

〔II〕



(1) 題意の分点についての条件から,

$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OQ}=3\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{4}$

となる.

(2) (1)の結果から

$\overrightarrow{OC}=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OQ}$

$=\frac{2}{3}(1-s)\overrightarrow{OA}+3s\overrightarrow{OB}$ …①

$\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OR}=t\cdot\frac{\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{4}$

$=\frac{1}{4}t\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}t\overrightarrow{OB}$ …②

となる. 今, $\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$ なのだから, ①かつ②より,

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(1-s)=\frac{1}{4}t \\ 3s=\frac{3}{4}t \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} s=\frac{2}{5} \\ t=\frac{8}{5} \end{cases}$$

となる.

(3)　(2)の結果から $\overrightarrow{OC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{6}{5}\overrightarrow{OB}$ であるので,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) &= \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{6}{5}\overrightarrow{OB}\right)\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{2}{5}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{6}{5}|\overrightarrow{OB}|^2+\frac{8}{5}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{2}{5}+\frac{6}{5}+\frac{8}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{6}{5} \end{aligned}$$

である.

(4)　$\overrightarrow{CU}=p\overrightarrow{CA}+q\overrightarrow{CB}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OU} &= \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CU} \\ &= \overrightarrow{OC}+p\overrightarrow{CA}+q\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OC}+p(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+q(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}) \\ &= p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+(1-p-q)\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

であるから(3)の結果もふまえ,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OU}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) &= \{p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+(1-p-q)\overrightarrow{OC}\}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) \\ &= (p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+(1-p-q)\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) \\ &= p|\overrightarrow{OA}|^2+q|\overrightarrow{OB}|^2+(p+q)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} \\ &\quad +(1-p-q)\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) \\ &= p+q+(p+q)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+(1-p-q)\cdot\frac{6}{5} \\ &= -\frac{9}{20}p+\left(\frac{6}{5}-\frac{9}{20}q\right) \end{aligned}$$

となる. よって,

$\overrightarrow{OU}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\alpha+\beta p+\gamma q$ が p,q に無関係に成り立つ

$\iff -\frac{9}{20}p+\left(\frac{6}{5}-\frac{9}{20}q\right)=\beta p+(\alpha+\gamma q)$ が p,q に無関係に成り立つ

$\iff \begin{cases} -\frac{9}{20}=\beta \\ \frac{6}{5}-\frac{9}{20}q=\alpha+\gamma q \end{cases}$ が q に無関係に成り立つ

$\iff \underbrace{\begin{cases} \alpha=\frac{6}{5} \\ \beta=-\frac{9}{20} \\ \gamma=-\frac{9}{20} \end{cases}}$

であり，これらが求める α,β,γ の値である.

(5) $\triangle ABC$ の周およびその内部を動く点Xについて，$\overrightarrow{CX}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$（$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ かつ $x+y\leqq 1$ …③）と表せる. $k=\overrightarrow{OX}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ とおくと，このとき(4)の結果から

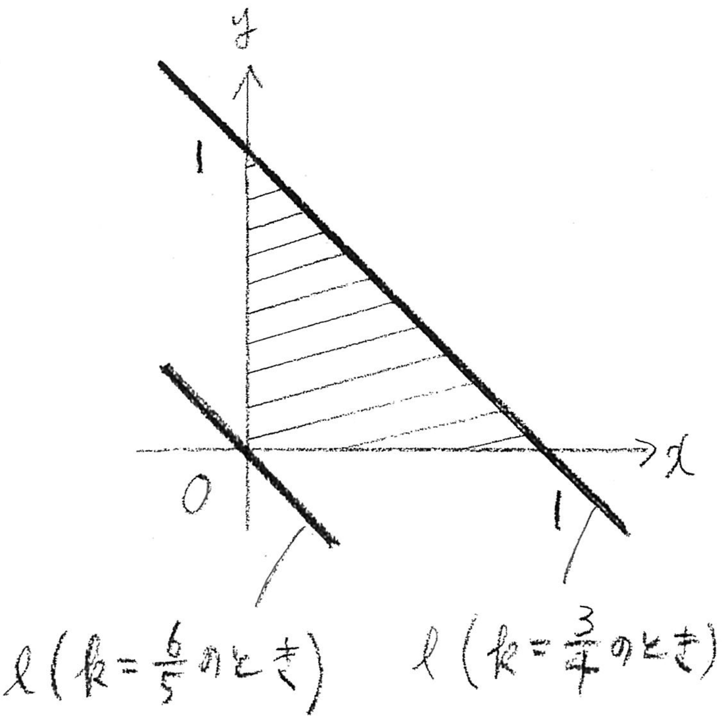
$$k=\frac{6}{5}-\frac{9}{20}x-\frac{9}{20}y$$

$$\therefore\ y=-x+\frac{8}{3}-\frac{20}{9}k$$

となる. 上式で表される xy 平面上の直線を l とする.

③を満たす点 (x,y) の集合は次図の斜線部（境界を含む）である. 直線 l がここを通るような k の最大値，最

小値が求めるものである．
図より ℓ が点 $(0, 0)$，点 $(1, 0)$ を通るとき，k はそれぞれ最大値 $\frac{6}{5}$，最小値 $\frac{3}{4}$ をとり，これらがそれぞれ求める最大値，最小値である．



［Ⅲ］

■ 解答例 □

(1)　$y' = -2x$ より，点 $\mathrm{P}(a,\ 9-a^2)$ における接線 ℓ の式は，

$$y = -2a(x-a) + 9 - a^2 = -2ax + a^2 + 9$$

よって，点 A の x 座標は

$$0 = -2ax + a^2 + 9$$

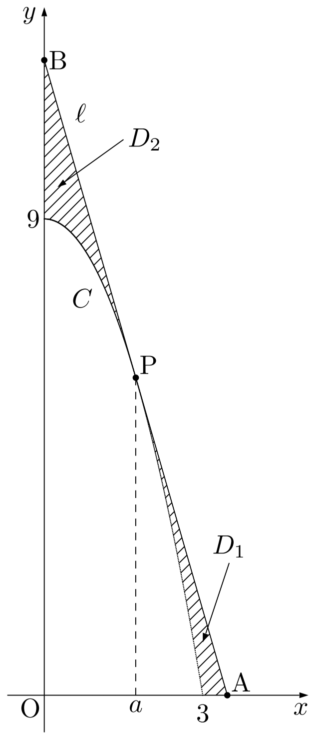
$$2ax = a^2 + 9$$

$0 < a < 3$ より，

$$x = \frac{a^2+9}{2a}$$

また，点 B の y 座標は

$$y = a^2 + 9$$



(2)　$\mathrm{OA} = \dfrac{a^2+9}{2a}$，$\mathrm{OB} = a^2+9$ より，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 $S(a)$ は

$$S(a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+9}{2a}\cdot(a^2+9) = \frac{(a^2+9)^2}{4a}$$

と表せるから，

$$S'(a) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2(a^2+9)\cdot 2a\cdot a - (a^2+9)^2}{a^2}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{(a^2+9)\{4a^2-(a^2+9)\}}{a^2}$$

$$= \frac{3(a^2+9)(a^2-3)}{4a^2}$$

$$= \frac{3(a^2+9)(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})}{4a^2}$$

a	(0)	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	(3)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

増減表より，$S(a)$ は $a=\sqrt{3}$ で最小となるので，求める $S(a)$ の最小値は，

$$S(\sqrt{3}) = \frac{(3+9)^2}{4\sqrt{3}} = \frac{144}{4\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$$

(3)　$a=\sqrt{3}$ のとき，$\mathrm{A}(2\sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 12)$，$\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 6)$ である．

S_1+S_2 は，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積から曲線 C と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積を除いた値であるから，(2) の結果を使うと

$$S_1+S_2 = 12\sqrt{3} - \int_0^3 (9-x^2)\,dx = 12\sqrt{3} - \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 12\sqrt{3} - 18$$

(4)　求める立体の体積を V とすると,

$$V=\int_0^9 \pi\cdot x^2\,dy=\pi\int_0^9 (9-y)\,dy=\pi\left[9y-\frac{y^2}{2}\right]_0^9=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{81}{2}\pi}$$

(5)　まず, V_2 を求めると,

$$\begin{aligned}V_2&=\frac{1}{3}\cdot(12-6)\cdot\{\pi\cdot(\sqrt{3})^2\}-\int_6^9 \pi\cdot x^2\,dy\\&=6\pi-\pi\int_6^9 (9-y)\,dy\\&=6\pi-\pi\left[9y-\frac{y^2}{2}\right]_6^9\\&=6\pi-\pi\left\{\left(81-\frac{81}{2}\right)-(54-18)\right\}\\&=\underset{\sim\sim}{\frac{3}{2}\pi}\end{aligned}$$

V_1 は △OAB を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積から, V と V_2 を除いた値であるから,

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot 12\cdot\{\pi\cdot(2\sqrt{3})^2\}-V-V_2=48\pi-\frac{81}{2}\pi-\frac{3}{2}\pi=\underset{\sim}{6\pi}$$

〔IV〕

■ 解答例 □

(1) $f(x) = x(\log x)^2 + 2x\log x + x = x(\log x + 1)^2$ を微分すると，

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)'(\log x + 1)^2 + x\left\{(\log x + 1)^2\right\}' \\ &= (\log x + 1)^2 + x \cdot 2(\log x + 1) \cdot \frac{1}{x} \\ &= (\log x + 1)^2 + 2(\log x + 1) \\ &= (\log x + 3)(\log x + 1) \end{aligned}$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e^3}$	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{e^3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f'(x) = 0$ を満たす x は，$x = \dfrac{1}{e^3}$，$\dfrac{1}{e}$

$x > 0$ に注意すると，$f(x)$ の増減表は右上の通りであるので，$y = f(x)$ の極値は，

$$x = \frac{1}{e^3} \text{ で } \underline{\text{極大値} \frac{4}{e^3}}, \qquad x = \frac{1}{e} \text{ で } \underline{\text{極小値 } 0}$$

(2)

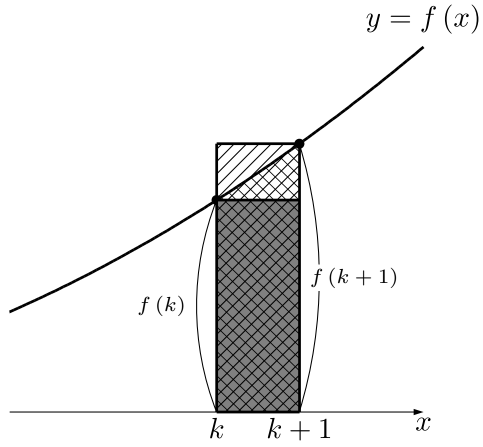
$$\begin{aligned} \int x\log x\,dx &= \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot (\log x)'\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C \\ &= \frac{1}{4}x^2(2X - 1) + C \end{aligned}$$

これより，$p(X) = \underline{2X - 1}$ であり，この結果を用いると，

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \int x(\log x + 1)^2\,dx \\ &= \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' (\log x + 1)^2\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2(\log x + 1)^2 - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \left\{(\log x + 1)^2\right\}'\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2(\log x + 1)^2 - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot 2(\log x + 1) \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2(\log x + 1)^2 - \int x(\log x + 1)\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2(X + 1)^2 - \frac{1}{4}x^2(2X - 1) - \frac{1}{2}x^2 + C \\ &= \frac{1}{4}x^2\left(2X^2 + 2X + 1\right) + C \end{aligned}$$

これより，$q(X) = \underline{2X^2 + 2X + 1}$

(3) (1) の増減表より，$f(x)$ は $x > \dfrac{1}{e}$ において単調に増加し，$f\left(\dfrac{1}{e}\right) = 0$ である．したがって，k を自然数として，右図より，面積を比較すると，



$$1 \cdot f(k) \leqq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqq 1 \cdot f(k+1)$$

$f(k) \leqq \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx$ において，$k = 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ として辺々を加えると，

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqq \int_2^{n+1} f(x)\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

また，$\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqq f(k+1)$ において，$k = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ として辺々を加えると，

$$\int_1^{n} f(x)\,dx \leqq \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=2}^{n} f(k) \quad \cdots\cdots ②$$

以上 ①，② より，$\displaystyle\int_1^{n} f(x)\,dx \leqq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leqq \int_2^{n+1} f(x)\,dx$ が成り立つ．

(証明了)

(4) $\log n = X_n$ とする．(2) の結果を用いると，

$$\int_1^{n} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^2\left\{2(\log x)^2 + 2\log x + 1\right\}\right]_1^{n}$$
$$= \frac{1}{4}n^2\left\{2(X_n)^2 + 2X_n + 1\right\} - \frac{1}{4} \geqq \frac{1}{2}n^2(X_n)^2$$

であり，

$$\int_2^{n+1} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^2\left\{2(\log x)^2 + 2\log x + 1\right\}\right]_2^{n+1}$$
$$= \frac{1}{4}(n+1)^2\left\{2(X_{n+1})^2 + 2X_{n+1} + 1\right\} - \left\{2(X_2)^2 + 2X_2 + 1\right\}$$
$$\leqq \frac{1}{4}(n+1)^2\left\{2(X_{n+1})^2 + 4X_{n+1} + 2\right\}$$
$$= \frac{1}{2}(n+1)^2(X_{n+1}+1)^2$$

$S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k)$ とおくと，(3) より，

$$\int_1^{n} f(x)\,dx \leqq S_n \leqq \int_2^{n+1} f(x)\,dx$$
$$\frac{1}{2}n^2(X_n)^2 \leqq S_n \leqq \frac{1}{2}(n+1)^2(X_{n+1}+1)^2$$

$n \geqq 2$ において $(nX_n)^r > 0$ であるので，辺々を $(nX_n)^r$ で割ると，

$$\frac{1}{2}n^{2-r}(X_n)^{2-r} \leqq \frac{S_n}{(nX_n)^r} \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^r} \cdot \frac{(X_{n+1}+1)^2}{(X_n)^r}$$

ここで,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}n^{2-r}\left(X_n\right)^{2-r}=\begin{cases}\infty & (2-r>0,\ \text{すなわち}\ 0<r<2\ \text{のとき}) \\ \dfrac{1}{2} & (2-r=0,\ \text{すなわち}\ r=2\ \text{のとき}) \\ 0 & (2-r<0,\ \text{すなわち}\ r>2\ \text{のとき})\end{cases}$$

であり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{X_{n+1}}{X_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=1$ を用いると,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^r}\cdot\frac{\left(X_{n+1}+1\right)^2}{\left(X_n\right)^r}=\begin{cases}\infty & (0<r<2\ \text{のとき}) \\ \dfrac{1}{2} & (r=2\ \text{のとき}) \\ 0 & (r>2\ \text{のとき})\end{cases}$$

であるので,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\left(nX_n\right)^r}=\begin{cases}\infty & (0<r<2\ \text{のとき}) \\ \dfrac{1}{2} & (r=2\ \text{のとき}) \\ 0 & (r>2\ \text{のとき})\end{cases}$$

であるので, $n\to\infty$ のとき, $\dfrac{S_n}{\left(nX_n\right)^r}=\dfrac{S_n}{(n\log n)^r}$ が 0 ではない定数 c に収束する r の値は $r=\underset{\sim}{2}$ であり, そのときの極限値 c は $c=\underset{\sim}{\dfrac{1}{2}}$ である.