# 1

(1) ア：ⓖ（120）　イ：ⓓ（84）

(2) ウ：ⓕ $\left(\dfrac{x^2-x+1}{x-2}\right)$　エ：ⓖ（$k>1$）

(3) オ：ⓒ $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$　カ：ⓕ $\left(\dfrac{2}{5}\right)$

(4) キ：ⓐ $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$　ク：ⓑ $\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

## ■解説□

### (1)

$\boxed{ア}$ 母音 a, e と子音 b, c, d の合計 5 個を 1 列に並べて得られる順列の総数は，$5! = 120$ 通りである．

$\boxed{イ}$ 余事象「両端とも子音」を考える．両端に子音 3 個から 2 個を並べる方法が $3\times 2 = 6$ 通り，残り 3 個を中央に並べる方法が $3! = 6$ 通りより，両端とも子音である並べ方は $6\times 6 = 36$ 通り．よって，少なくとも一方の端に母音のある並べ方は $120-36 = 84$ 通りである．

### (2)

$\boxed{ウ}$ 分母は $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$．分子に $x=1$ を代入すると 0 となるので $(x-1)$ が因数であり，$x^3-2x^2+2x-1=(x-1)(x^2-x+1)$ を得る．よって，

$$\frac{x^3-2x^2+2x-1}{x^2-3x+2}=\frac{(x-1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x^2-x+1}{x-2}\quad (x\neq 1)$$

$\boxed{エ}$ $k>0$ とする．曲線と直線が異なる 2 つの共有点をもつための条件は，方程式 $\dfrac{x^2-x+1}{x-2}=kx+1$ が $x\neq 2$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつことである．$x\neq 2$ のもとで両辺に $(x-2)$ を掛けて整理すると，

$$(1-k)x^2-2(1-k)x+3=0\quad \cdots(*)$$

$k=1$ のとき $(*)$ は $3=0$ となり不適．$k\neq 1$ のとき，$(*)$ が異なる 2 つの実数解をもつ条件は $D>0$ である．

$$\frac{D}{4}=(1-k)^2-3(1-k)=(1-k)(-2-k)=-(1-k)(k+2)$$

$D>0$ より $(1-k)(k+2)<0$ であり，$k>0$ より $k+2>0$ であるから，$1-k<0$，すなわち $k>1$ が得られる．

逆に $k>1$ のとき $D>0$ が成り立ち，また $x=2$ を $(*)$ に代入すると $3=0$（不適）となるから，$(*)$ の 2 解はいずれも $x\neq 2$ を満たす．以上より，求める必要十分条件は $k>1$.

(3)

3 点 $\mathrm{A}(\alpha, 1, 2)$，$\mathrm{B}(1, \beta, -1)$，$\mathrm{C}(2, 0, -3)$ が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 $t$ が存在する．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1-\alpha, \beta-1, -3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (2-\alpha, -1, -5)$ より，

$$1-\alpha = t(2-\alpha), \quad \beta - 1 = -t, \quad -3 = -5t$$

第 3 式より $t = \dfrac{3}{5}$．第 2 式より $\beta = 1 - \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$．第 1 式より $1-\alpha = \dfrac{3}{5}(2-\alpha)$ を解いて $\alpha = -\dfrac{1}{2}$．

以上より，$\alpha = -\dfrac{1}{2}$，$\beta = \dfrac{2}{5}$．

(4)

$\alpha = 1 - i$ とする．複素数 $\alpha$ に対応する複素数平面上の点を A とし，原点 O と点 A を 2 頂点とする正三角形の第 3 の頂点を表す複素数 $\beta$ を求める．

線分 OA を 1 辺とする正三角形の第 3 の頂点は，$\alpha$ を原点中心に $\pm 60^\circ$ 回転させた点であるから，$\beta = \alpha(\cos(\pm 60^\circ) + i\sin(\pm 60^\circ))$ である．

$+60^\circ$ 回転の場合：

$$\beta = (1-i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

$-60^\circ$ 回転の場合：

$$\beta = (1-i)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

$\beta$ の虚部が正であるのは $+60^\circ$ 回転の場合（$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} > 0$）．

以上より，$\beta = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$．

$\boxed{2}$

(1) $\boxed{\text{ア}}$ $1$ $\boxed{\text{イ}}$ $x$

(2) $\boxed{\text{ウ}}$ $-x\cos x+\sin x$ $\boxed{\text{エ}}$ $\dfrac{\pi^2}{8}-1$

(3) $\boxed{\text{オ}}$ $\dfrac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{カ}}$ $\dfrac{3}{4}\pi$

(4) $\boxed{\text{キ}}$ $\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{4}\right)\sin 2x+\dfrac{x}{2}\cos 2x$ $\boxed{\text{ク}}$ $\pi\left(\dfrac{5}{16}\pi^2-\dfrac{1}{2}\right)$

## ■ 解説 □

(1) $f'(x)=1\cdot\sin x+x\cdot\cos x=\sin x+x\cos x$ より,

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=1+\frac{\pi}{2}\cdot 0=1$$

点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ における曲線 $C_1$ の接線 $\ell$ の方程式は,

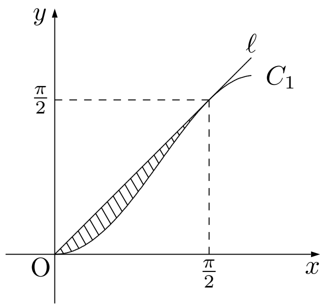
$$y=1\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=x$$

(2) 部分積分法を用いると,

$$\int x\sin x\,dx=x(-\cos x)-\int 1\cdot(-\cos x)\,dx=-x\cos x+\sin x+C$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において, $x\geqq x\sin x$ が成り立つので, 直線 $\ell$ が曲線 $C_1$ より常に上側にあるため, 求める面積を $S$ とすると,

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-x\sin x)\,dx\\&=\left[\frac{x^2}{2}-(-x\cos x+\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\left(\frac{\pi^2}{8}-\sin\frac{\pi}{2}\right)-(0-0)\\&=\frac{\pi^2}{8}-1\end{aligned}$$




(3) $0\leqq x\leqq\pi$ において $f(x)=g(x)$, すなわち $x\sin x=x|\cos x|$ を解く.

$x=0$ は共有点の $x$ 座標の 1 つであるから, $x\fallingdotseq 0$ のとき $\sin x=|\cos x|$ の解について考える.

$0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき, $\sin x=\cos x$ であり, $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ より,

$$x=\frac{\pi}{4}$$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ のとき, $\sin x=-\cos x$ であり, $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ より,

$$x=\frac{3}{4}\pi$$

(4)　部分積分法を 2 回用いると，

$$\begin{aligned}\int x^2\cos 2x\,dx &= x^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-\int 2x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\,dx\\ &=\frac{x^2}{2}\sin 2x-\int x\sin 2x\,dx\\ &=\frac{x^2}{2}\sin 2x-\left\{x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\,dx\right\}\\ &=\frac{x^2}{2}\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x-\int\frac{1}{2}\cos 2x\,dx\\ &=\frac{x^2}{2}\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x\,dx\\ &=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x+C'\end{aligned}$$

$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{3}{4}\pi$ において，$\sin x\geqq|\cos x|$ であるから，

$$f(x)-g(x)=x\sin x-x|\cos x|=x(\sin x-|\cos x|)\geqq 0$$

よって，$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{3}{4}\pi$ において，曲線 $C_1$ が曲線 $C_2$ より常に上側にあり，かつ $x|\cos x|\geqq 0$ により曲線 $C_2$ は常に $x$ 軸の上側にあるため，求める立体の体積を $V$ とすると，

$$\begin{aligned}V&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\pi\{f(x)\}^2\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\pi\{g(x)\}^2\,dx\\ &=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left\{(x\sin x)^2-(x|\cos x|)^2\right\}\,dx\\ &=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left(x^2\sin^2 x-x^2\cos^2 x\right)\,dx\\ &=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(-x^2\cos 2x)\,dx\\ &=-\pi\left[\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\\ &=-\pi\left\{\left(\frac{9}{32}\pi^2-\frac{1}{4}\right)\cdot(-1)-\left(\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{4}\right)\cdot 1\right\}\\ &=-\pi\left(-\frac{10}{32}\pi^2+\frac{2}{4}\right)\\ &=\pi\left(\frac{5}{16}\pi^2-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ $\boxed{\text{ア}}$ $(4,\ 3)$　$\boxed{\text{イ}}$ $-\dfrac{1}{2}$　$\boxed{\text{ウ}}$ $2\sqrt{2}$　$\boxed{\text{エ}}$ $-\dfrac{4}{3}$　$\boxed{\text{オ}}$ $0$　$\boxed{\text{カ}}$ $\left(\dfrac{8}{5},-\dfrac{1}{5}\right)$
$\boxed{\text{キ}}$ $-\dfrac{89}{25}$　$\boxed{\text{ク}}$ $\dfrac{105}{16}$

■解説□

直線 $\ell$： $kx+y-(4k+3)=0$

円 $C$： $x^2+y^2-2y-3=0 \iff x^2+(y-1)^2=4$

円 $C$ は中心 A$(0,\ 1)$，半径 2 である．

(1)　直線 $\ell$ の式は

$$k(x-4)+(y-3)=0$$

これを $k$ の恒等式とみて

$$x-4=0,\ \ y-3=0 \quad \text{すなわち} \quad x=4,\ y=3$$

よって，直線 $\ell$ が通る定点 P の座標は P$\boxed{\mathbf{(4,\ 3)}}_{\text{ア}}$

(2)　直線 $\ell$ が A$(0,\ 1)$ を通るとき

$$k\cdot 0+1-(4k+3)=0$$

を満たすので

$$k=\boxed{-\frac{1}{2}}_{\text{イ}}$$

$k=-1$ のとき，直線 $\ell : y=x-1$

直線 $\ell$ と円 $C$ は 2 点 $(2,\ 1)$，$(0,\ -1)$ で交点をもつ．

この 2 つの交点を結ぶ線分の長さは $\boxed{\mathbf{2\sqrt{2}}}_{\text{ウ}}$

次に，$\ell$ と $C$ が異なる 2 点で交わるための必要十分条件は，円 $C$ の中心 A と $\ell$ の距離を $d$ として

$$(\text{中心と直線の距離}) < (\text{半径}) \quad \text{すなわち} \quad d<2$$

$$d=\frac{|k\cdot 0+1-(4k+3)|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|4k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$$

なので

$$\frac{2|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}<2 \quad \text{すなわち} \quad |2k+1|<\sqrt{k^2+1}$$

両辺非負より，2 乗して

$$(2k+1)^2<k^2+1$$

整理すると

$$k(3k+4)<0$$

よって　$\boxed{-\dfrac{4}{3}}_{\text{エ}} < k < \boxed{\mathbf{0}}_{\text{オ}}$

(3)　$k=-\frac{4}{3}$ のとき，$\ell$ は

$$-\frac{4}{3}x+y-\left(4\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+3\right)=0 \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}$$

このとき，$d=2$ であるから，$C$ と $\ell$ は接する．
共有点 Q は第 4 象限の接点である．
$\ell$ に直交する直線の傾きは $-\frac{3}{4}$ であるから，$\ell$ に直交するベクトルの 1 つに $\vec{n}=(4,\ -3)$ がある．
ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ と $\vec{n}$ は同じ向きで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=2$（半径），$|\vec{n}|=5$ より $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{2}{5}\vec{n}$

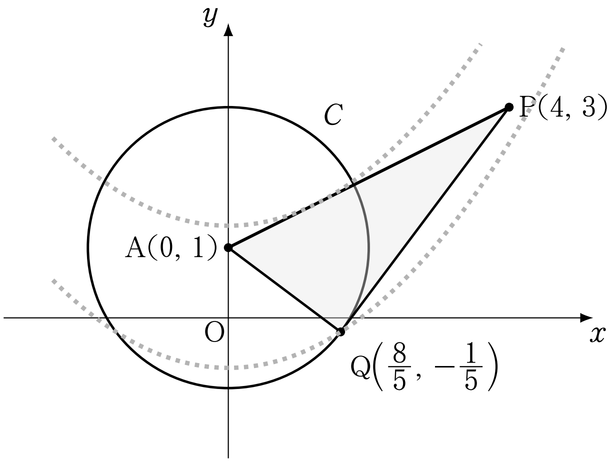
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(0,\ 1)+\frac{2}{5}(4,\ -3)=\left(\frac{8}{5},\ -\frac{1}{5}\right)$$

よって，点 Q の座標は $\boxed{\left(\frac{8}{5},\ -\frac{1}{5}\right)}_{\text{カ}}$

(4)　点 $(x,\ y)$ が三角形 APQ およびその内部を動くとき

$$t=5y-x^2 \ \ \text{すなわち} \ \ y=\frac{x^2}{5}+\frac{t}{5} \quad \cdots\cdots①$$

が表す $t$ の最小値と最大値を求める．
① は頂点 $\left(0,\ \frac{t}{5}\right)$，下に凸の放物線である．
① が三角形 APQ と共有点をもって，$t$ が最小または最大になる点を考える．そのときの $t$ が最小値，最大値になる．




$t$ が最小になる点は，点 Q か点 P のいずれかであるが，
点 $\mathrm{Q}\left(\frac{8}{5},\ -\frac{1}{5}\right)$ における $t$ の値は　$t=5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{8}{5}\right)^2=-\frac{89}{25}$
点 P(4, 3) における $t$ の値は　$t=5\cdot 3-4^2=-1$
$-\frac{89}{25}<-1$　であるから $t$ の最小値は　$\boxed{-\frac{89}{25}}_{\text{キ}}$
$t$ が最大になる点は辺 AP 上にある．

$$\text{線分 AP}: y=\frac{x}{2}+1\ (0\leqq x\leqq 4) \quad \cdots\cdots②$$

三角形の周または内部の点は　$y \leqq \dfrac{x}{2}+1$ を満たすことから

$$t=5y-x^2 \leqq 5\left(\frac{x}{2}+1\right)-x^2=-x^2+\frac{5}{2}x+5=-\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{105}{16} \leqq \frac{105}{16}$$

ゆえに　$t \leqq \dfrac{105}{16}$

等号が成り立つのは　$y=\dfrac{x}{2}+1$ かつ $x=\dfrac{5}{4}$（これは $0 \leqq x \leqq 4$ を満たす）

よって，$t$ の最大値は　$\boxed{\mathbf{\dfrac{105}{16}}}_{ク}$

**ク の別解例**

① と ② を連立して

$$\frac{x^2}{5}+\frac{t}{5}=\frac{x}{2}+1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{x^2}{5}-\frac{1}{2}x+\frac{t}{5}-1=0$$

この 2 次方程式の判別式を $D$ として

$$D=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{t}{5}-1\right)=-\frac{4}{25}t+\frac{21}{20}$$

$D=0$ とすると　$t=\dfrac{105}{16}$

このとき，重解は　$x=\dfrac{5}{4}$　であるから，① と ② が接する点は辺 AP 上にある.

よって，$t$ の最大値は　$\boxed{\mathbf{\dfrac{105}{16}}}_{ク}$

# 4

## ■解答例□

2 個のサイコロの出た目の和 $S$ を表にまとめると右の通りであるので，2 個のサイコロを 1 回投げる毎に，

| $S$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

- 点 P が移動しない確率は，$\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$
- 点 P が隣の 3 頂点のいずれかに移動する確率は，
$$\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$$

(1) サイコロを 1 回投げたとき，点 P が頂点 A にいる条件は，「点 P が移動しない」ことであるので，求める確率 $a_1$ は，
$$a_1=\frac{1}{6}$$
また，サイコロを 1 回投げたとき，点 P が頂点 B にいる条件は，「点 P が頂点 B に移動する」ことであるので，求める確率 $b_1$ は，
$$b_1=\frac{5}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$$

(2) サイコロを 2 回投げたとき，点 P が頂点 A にいる条件は，
- 点 P が A → A → A と移動しない
- 点 P が A → B → A と移動する
- 点 P が A → C → A と移動する
- 点 P が A → D → A と移動する

以上 4 パターンあり，互いに排反であるので，求める確率 $a_2$ は，
$$a_2=\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{18}\right)^2+\left(\frac{5}{18}\right)^2+\left(\frac{5}{18}\right)^2=\frac{7}{27}$$

(3) サイコロを $n$ 回投げたとき，

点 P が頂点 C にいる確率を $c_n$，

点 P が頂点 D にいる確率を $d_n$

とすると，$a_n+b_n+c_n+d_n=1$ ……① が成り立つ．

また，(1) と同様に考えると，$c_1=\dfrac{5}{18}$，$d_1=\dfrac{5}{18}$ である．

$n$ 回目と $(n+1)$ 回目に注目すると，サイコロを $(n+1)$ 回投げたとき，点 P が頂点 A にいる条件は，
- $n$ 回目に点 P が頂点 A にあり，移動しない
- $n$ 回目に点 P が頂点 B にあり，頂点 A に移動する
- $n$ 回目に点 P が頂点 C にあり，頂点 A に移動する
- $n$ 回目に点 P が頂点 D にあり，頂点 A に移動する

以上 4 パターンあり，互いに排反であるので，漸化式を立式すると，

$$a_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{5}{18}b_n+\frac{5}{18}c_n+\frac{5}{18}d_n \quad \cdots\cdots②$$

同様に考えると，

$$b_{n+1}=\frac{5}{18}a_n+\frac{1}{6}b_n+\frac{5}{18}c_n+\frac{5}{18}d_n \quad \cdots\cdots③$$

$$c_{n+1}=\frac{5}{18}a_n+\frac{5}{18}b_n+\frac{1}{6}c_n+\frac{5}{18}d_n \quad \cdots\cdots④$$

$$d_{n+1}=\frac{5}{18}a_n+\frac{5}{18}b_n+\frac{5}{18}c_n+\frac{1}{6}d_n \quad \cdots\cdots⑤$$

ここで，② − ③ より，

$$a_{n+1}-b_{n+1}=-\frac{1}{9}a_n+\frac{1}{9}b_n=-\frac{1}{9}\left(a_n-b_n\right)$$

数列 $\{a_n-b_n\}$ は，初項 $a_1-b_1=\frac{1}{6}-\frac{5}{18}=-\frac{1}{9}$，公比 $-\frac{1}{9}$ の等比数列であるので，

$$a_n-b_n=-\frac{1}{9}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{9}\right)^n$$

以上より，$b_n=\underline{a_n-\left(-\frac{1}{9}\right)^n}$ $\cdots\cdots⑥$

② − ④ および ② − ⑤ より，同様に考えると，$c_n=d_n=a_n-\left(-\frac{1}{9}\right)^n$ $\cdots\cdots⑦$

これらを ② に代入すると，

$$a_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+3\cdot\frac{5}{18}\left\{a_n-\left(-\frac{1}{9}\right)^n\right\}=\underline{a_n-\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{9}\right)^n}$$

(4) ⑥，⑦ を ① に代入すると，

$$a_n+3\left\{a_n-\left(-\frac{1}{9}\right)^n\right\}=1$$

$$4a_n=3\left(-\frac{1}{9}\right)^n+1$$

$$a_n=\underline{\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{9}\right)^n+\frac{1}{4}}$$

$\left|-\frac{1}{9}\right|<1$ であることから，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{9}\right)^n+\frac{1}{4}\right\}=\underline{\frac{1}{4}}$$

**別解**（(3) の ⑤ 以降）

(3) ここで，③ − ④ より，

$$b_{n+1}-c_{n+1}=-\frac{1}{9}b_n+\frac{1}{9}c_n=-\frac{1}{9}\left(b_n-c_n\right)$$

数列 $\{b_n-c_n\}$ は，初項 $b_1-c_1=\frac{5}{18}-\frac{5}{18}=0$，公比 $-\frac{1}{9}$ の等比数列であるので，

$$b_n-c_n=0\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}=0$$

③ − ⑤ より，同様に考えると，$b_n-d_n=0$

以上より，$b_n = c_n = d_n$ が成り立つので，① より，

$$a_n + 3b_n = 1$$

$$b_n = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{-\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}}$$

これらを ② に代入すると，

$$a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + 3\cdot\frac{5}{18}b_n = \frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9}a_n + \frac{5}{18} \quad \cdots\cdots ⑧$$

（4）⑧ を式変形すると，$a_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{9}\left(a_n - \frac{1}{4}\right)$

数列 $\left\{a_n - \frac{1}{4}\right\}$ は，初項 $a_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$，公比 $-\frac{1}{9}$ の等比数列であるので，

$$a_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$a_n = -\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$$

$\left|-\frac{1}{9}\right| < 1$ であることから，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}$$

代々木ゼミナール