〔Ⅰ〕

(1) $\boxed{ア}$ 6　$\boxed{イ}$ 12　$\boxed{ウ}$ 2^{n-1}

$\boxed{エ}$ $2^{n-1}-2$　$\boxed{オ}$ $3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3$

(2) $\boxed{カ}$ $2a$　$\boxed{キ}$ 2　$\boxed{ク}$ $-a+2$

$\boxed{ケ}$ $2+2\sqrt{2}$　$\boxed{コ}$ 5

■解説□

(1)　5 個の文字の列を考えたとき，b，c，d をすべて 1 つずつ含み a から始まり a で終わる文字の列は，a ○○○ a において，○に b，c，d を 1 列に並べる並べ方と同じであるから，

$$3!=\underbrace{6}_{ア}\quad（通り）$$

また，b を 1 つだけ含み a から始まり a で終わる文字の列は，上の場合の他に

acbca，adbda，abaca，abada，acaba，adaba

があるので，この場合の文字の列は，

$$6+6=\underbrace{12}_{イ}\quad（通り）$$

次に，n 個の文字の列を考えたとき，d を 1 つも含まない a から始まる文字の列は，a$\underbrace{○○\ \cdots\ ○}_{n-1\text{ 個}}$ において，○に入るのは 2 通りずつであるので，

$$\underbrace{2^{n-1}}_{ウ}\quad（通り）$$

そして，d は 1 つも含まないが b，c をいずれも 1 つ以上含む a から始まる文字の列は，$\boxed{\quad ウ \quad}$ から a と b だけの場合の 1 通りと，a と c だけの場合の 1 通りを除くので，

$$\underbrace{2^{n-1}-2}_{エ}\quad（通り）$$

よって，b，c，d をいずれも 1 つ以上含む a から始まる文字の列は，

(a から始まる文字の列)
$-\Big\{$(b は 1 つも含まないが c，d をいずれも 1 つ以上含む a から始まる文字の列)
+(c は 1 つも含まないが b，d をいずれも 1 つ以上含む a から始まる文字の列)
+(d は 1 つも含まないが b，c をいずれも 1 つ以上含む a から始まる文字の列)
+(b，c を 1 つも含まない a から始まる文字の列)
+(c，d を 1 つも含まない a から始まる文字の列)
+(d，b を 1 つも含まない a から始まる文字の列)$\Big\}$

であるから，

$$3^{n-1}-\left\{3\cdot(2^{n-1}-2)+3\right\}=\underbrace{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}_{オ}\quad（通り）$$

〔Ⅰ〕

(2)　方程式 $P(x)=0$ は実数係数の 4 次方程式なので，

$\alpha=1+i$ を解にもつから $\overline{\alpha}=1-i$ も解にもつ．

これより　$Q(x)=\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=x^2-2x+\underbrace{2}_{\text{キ}}$

$P(x)$ を $Q(x)$ で割ると

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & x^2 & +(-a+2)x & +b-2a+2 & & \\
\hline
x^2-2x+2 & x^4 & -ax^3 & +bx^2 & -2ax & +4 \\
 & x^4 & -2x^3 & +2x^2 & & \\
\cline{2-6}
 & & (-a+2)x^3 & +(b-2)x^2 & -2ax & \\
 & & (-a+2)x^3 & +(2a-4)x^2 & +(-2a+4)x & \\
\cline{3-6}
 & & & (b-2a+2)x^2 & -4x & +4 \\
 & & & (b-2a+2)x^2 & +(-2b+4a-4)x & +2b-4a+4 \\
\cline{4-6}
 & & & & (2b-4a)x & -2b+4a
\end{array}
$$

余りが 0 になるので $(2b-4a)x-2b+4a=0$　すなわち　$2(b-2a)(x-1)=0$

これは x の恒等式であるから　$2(b-2a)=0$

よって　$b=\underbrace{2a}_{\text{カ}}$

$R(x)$ は商なので　$R(x)=x^2+\underbrace{(-a+2)}_{\text{ク}}x+2$

$P(x)=0$ つまり $Q(x)R(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつのは $R(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことが条件より，判別式を D_1 として

$$D_1=(-a+2)^2-8=a^2-4a-4>0$$

$a>0$ であるから　$a>2+2\sqrt{2}$　……①

これより　$a_0=\underbrace{2+2\sqrt{2}}_{\text{ケ}}$

$a>a_0$ のとき 4 点は $1+i$，$1-i$，$R(x)=0$ の異なる 2 つの実数解である．

これらの 4 点のうちのいずれかの 3 点が一直線上にあるのは 実部が 1 となる直線上にあるしかなく，$R(x)=0$ が $x=1$ を解にもつ．

よって $R(1)=0$ であるから　$a=\underbrace{5}_{\text{コ}}$

これは ① をみたす．

〔Ⅱ〕

■解答例□

(1) $f(1)=1+(e-1)\cdot 0=1$,　$f(e)=1+(e-1)\cdot 1=e$

(2) $g(x)=1+(e-1)\log x-x$ より，

$$g'(x)=\frac{e-1}{x}-1=\frac{(e-1)-x}{x}$$

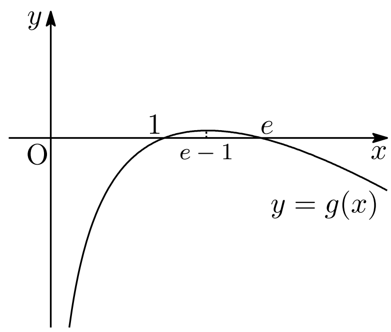
よって，$g(x)$ $(x>0)$ の増減は右表のようになり，

$g(x)$ の極値は，$x=e-1$ のとき極大値

$$\begin{aligned}g(e-1)&=1+(e-1)\log(e-1)-(e-1)\\&=(e-1)\log(e-1)-e+2\end{aligned}$$

x	(0)	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		↗	極大	↘

となる．これと $g(1)=g(e)=0$ より $y=g(x)$ のグラフの概形として右図が得られ，これより $g(x)\geqq 0$ を満たす x の値の範囲は $1\leqq x\leqq e$ である．



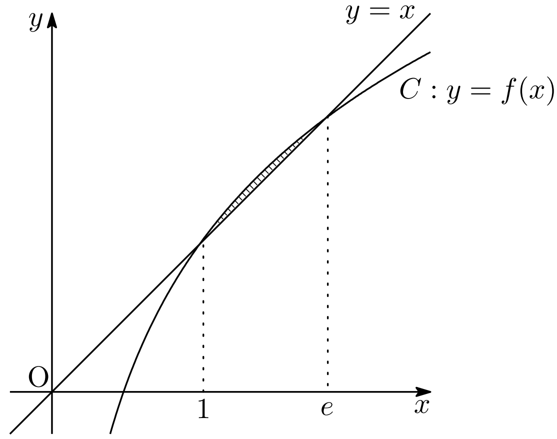
(3) 積分定数を C_1 として，

$$\begin{aligned}\int f(x)dx&=\int\{1+(e-1)\log x\}dx\\&=x+(e-1)(x\log x-x)+C_1\\&=(e-1)x\log x+(2-e)x+C_1\end{aligned}$$

(4) (2) より，$g(x)=0$ $(x>0)$ の解は $x=1,\ e$ であり，$1\leqq x\leqq e$ において $g(x)\geqq 0$ である．

これと $g(x)=f(x)-x$ より，C と直線 $y=x$ は $x=1,\ e$ においてのみ交わり，$1\leqq x\leqq e$ において $f(x)\geqq x$ が成り立つ．よって，(3) より

$$\begin{aligned}S&=\int_1^e\{f(x)-x\}dx\\&=\left[(e-1)x\log x+(2-e)x-\frac{x^2}{2}\right]_1^e\\&=(e-1)e+(2-e)(e-1)-\frac{1}{2}(e^2-1)\\&=-\frac{1}{2}e^2+2e-\frac{3}{2}\end{aligned}$$



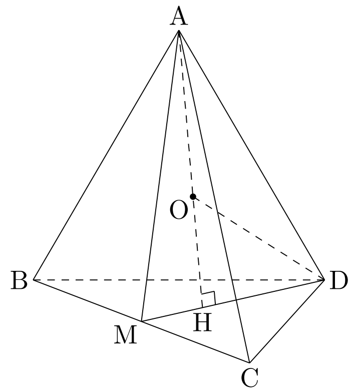
〔Ⅲ〕

■解答例□

(1) 球面 S の半径を R とすると, $R=\mathrm{OA}$ であるから,

$$R=\sqrt{1^2+1^2+4^2}=\sqrt{18}=\underset{\sim\sim\sim}{3\sqrt{2}}$$

(2) $\triangle\mathrm{ABH}\equiv\triangle\mathrm{ACH}\equiv\triangle\mathrm{ADH}$ より, $\mathrm{BH}=\mathrm{CH}=\mathrm{DH}$ であるから, 点 H は $\triangle\mathrm{BCD}$ の外心である. さらに, 正三角形の外心と重心は一致するので, 点 H は $\triangle\mathrm{BCD}$ の重心である. よって, BC の中点を M とすると,



$$\mathrm{DH}=\frac{2}{3}\mathrm{DM}=\frac{2}{3}\cdot a\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

したがって, $\triangle\mathrm{ADH}$ において三平方の定理より,

$$\mathrm{AH}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}a^2}=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{\sqrt{6}}{3}a}$$

(3) $\mathrm{OH}=\mathrm{AH}-\mathrm{OA}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a-3\sqrt{2},\ \mathrm{DH}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a,\ \mathrm{OD}=3\sqrt{2}$ より,

$$\mathrm{OD}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{DH}^2$$

$$18=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a-3\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$$

$$a^2-4\sqrt{3}a=0$$

よって, $a>0$ より,

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{a=4\sqrt{3}}$$

(4) 点 $\mathrm{B}(s,\ t,\ 0)$ とおくと, $\mathrm{OB}=3\sqrt{2},\ \mathrm{AB}=4\sqrt{3}$ より,

$$\begin{cases} s^2+t^2=18 & \cdots ① \\ (s-1)^2+(t-1)^2+4^2=48 & \cdots ② \end{cases}$$

よって, ①, ② より,

$$-2s-2t+36=48 \quad \text{すなわち} \quad s+t=-6 \quad \cdots ③$$

したがって, ①, ③ より, $s=-3,\ t=-3$ であるので,

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\mathrm{B}(-3,\ -3,\ 0)}$$

(5) 点 $\mathrm{C}(p,\ q,\ r)\ \ (p>0)$ とおくと, $\mathrm{OC}=3\sqrt{2},\ \mathrm{AC}=\mathrm{BC}=4\sqrt{3}$ より,

$$\begin{cases} p^2+q^2+r^2=18 & \cdots ④ \\ (p-1)^2+(q-1)^2+(r-4)^2=48 & \cdots ⑤ \\ (p+3)^2+(q+3)^2+r^2=48 & \cdots ⑥ \end{cases}$$

よって, ⑥ − ④ より,

$$6p+6q+18=48-18 \quad \text{すなわち} \quad p+q=2 \quad \cdots ⑦$$

また, ⑥ − ⑤ より,

$$8p+8q+8r+18-18=0 \quad \text{すなわち} \quad p+q+r=0 \quad \cdots ⑧$$

したがって, ⑦, ⑧ より, $r=-2$ とわかるので, ④, ⑦ より,

$$p^2+(2-p)^2+4=18$$

$$2(p^2-2p-5)=0$$

$$p=1\pm\sqrt{6}$$

ゆえに, $p>0$ より $p=1+\sqrt{6}$ であり, $q=2-(1+\sqrt{6})=1-\sqrt{6}$ であるので,

$$\mathrm{C}(1+\sqrt{6},\ 1-\sqrt{6},\ -2)$$

〔IV〕

■解答例□

(1) $r^{-x^2}\dfrac{d}{dx}\left(x^2r^{x^2}\right)=r^{-x^2}\left(2xr^{x^2}+x^2r^{x^2}\log r\cdot 2x\right)$

$$=\underline{\boldsymbol{2x+2x^3\log r}}$$

(2) (1) より　$\dfrac{d}{dx}\left(x^2r^{x^2}\right)=2x\left(1+x^2\log r\right)r^{x^2}$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{2}}|x|\left(1+x^2\log r\right)r^{x^2}\,dx$$

$$=-\int_{-\sqrt{3}}^{0}x\left(1+x^2\log r\right)r^{x^2}\,dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}x\left(1+x^2\log r\right)r^{x^2}\,dx$$

$$=-\left[\frac{x^2r^{x^2}}{2}\right]_{-\sqrt{3}}^{0}+\left[\frac{x^2r^{x^2}}{2}\right]_{0}^{\sqrt{2}}$$

$$=\underline{\boldsymbol{\frac{3}{2}r^3+r^2}}$$

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}ir^{i-1}$ とおくと

$$\begin{cases} S_n=1+2r+3r^2+\cdots+nr^{n-1} & \cdots\cdots ① \\ rS_n=\qquad r+2r^2+\cdots+(n-1)\,r^{n-1}+nr^n & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① − ② より

$$\begin{aligned}(1-r)\,S_n&=1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}-nr^n\\&=\frac{1-r^n}{1-r}-nr^n\\&=\frac{1-r^n-nr^n\,(1-r)}{1-r}\end{aligned}$$

よって　$S_n=\underline{\boldsymbol{\dfrac{1-(n+1)\,r^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2}}}$

(4) $$\begin{aligned}T_n &= \sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}|x|\left(1+\sin x+x^2\log r\right)r^{x^2-1}\,dx\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{\int_{a_i}^{0}|x|\left(1+\sin x+x^2\log r\right)r^{x^2-1}\,dx+\int_{0}^{b_i}|x|\left(1+\sin x+x^2\log r\right)r^{x^2-1}\,dx\right\}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{\int_{-\sqrt{i}}^{0}|x|\left(1+\sin x+x^2\log r\right)r^{x^2-1}\,dx+\int_{0}^{\sqrt{i}}|x|\left(1+\sin x+x^2\log r\right)r^{x^2-1}\,dx\right\}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_{-\sqrt{i}}^{\sqrt{i}}|x|\left(1+\sin x+x^2\log r\right)r^{x^2-1}\,dx\\
&= \sum_{i=1}^{n}2\int_{0}^{\sqrt{i}}|x|\left(1+x^2\log r\right)r^{x^2-1}\,dx\\
&\qquad\left(\because\ |x|\left(1+x^2\log r\right)r^{x^2-1}\text{は偶関数，}|x|\sin x\cdot r^{x^2-1}\text{は奇関数}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\sqrt{i}}2x\left(1+x^2\log r\right)r^{x^2-1}\,dx\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[x^2r^{x^2-1}\right]_0^{\sqrt{i}}\\
&= \sum_{i=1}^{n}ir^{i-1}\\
&= S_n\end{aligned}$$

よって，T_n は a_i と b_i の定め方によらずに n と r だけで定まり

$$T_n = \boldsymbol{\frac{1-(n+1)\,r^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}T_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{(1-r)^2}-\frac{nr^n(1-r)+r^n}{(1-r)^2}\right\}$$

ここで，$0<r<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$

問題文より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n = \boldsymbol{\frac{1}{(1-r)^2}}$