2023 同志社大学（2/10 実施　理工）理系数学　解答例

〔 I 〕(1) $\boxed{ア}\frac{13}{18}$ $\boxed{イ}\frac{5}{36}$ $\boxed{ウ}\frac{13}{18}$ $\boxed{エ}\frac{7}{12}$ $\boxed{オ}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{7}{12}\right)^m$

(2) $\boxed{カ}1+i$ $\boxed{キ}-2+i$ $\boxed{ク}-i$ $\boxed{ケ}6i$ $\boxed{コ}1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

解説

(1)

ア　2 回の試行後に白玉が袋 **C** の中にあるための条件は,「2 回連続で 1 の目が出る」または「2 回連続で 1 の目以外が出る」であるから,

$$c_2=\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2=\underset{\sim\sim}{\frac{13}{18}}$$

イ と ウ　$n=1,2,3,\cdots$ に対して,$n+2$ 回の試行後に袋 **C** の中に白玉があるための条件は,「n 回の試行後に袋 **A** に白玉があり, その後, まず袋 **B** と袋 **C** の中身の交換があり, さらに, 袋 **A** と袋 **C** の中身の交換がある」または「n 回の試行後に袋 **B** に白玉があり, その後, まず袋 **A** と袋 **C** の中身の交換があり, さらに, 袋 **B** と袋 **C** の中身の交換がある」または「n 回の試行後に袋 **C** に白玉があり, その後, 袋 **A** と袋 **C** の中身の交換が 2 回連続で起こるか, 袋 **B** と袋 **C** の中身の交換が 2 回連続で起こる」であるから,

$$c_{n+2}=a_n\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+b_n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+c_n\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}=\underset{\sim\sim}{\frac{5}{36}}(a_n+b_n)+\underset{\sim\sim}{\frac{13}{18}}c_n$$

が成り立つ.

エ　$n=1,2,3,\cdots$ に対して $a_n+b_n+c_n=1$ が成り立つから, 前問の結果より,

$$c_{n+2}=\frac{5}{36}(1-c_n)+\frac{13}{18}c_n=\frac{7}{12}c_n+\frac{5}{36}$$

が成り立ち, これを変形すると

$$c_{n+2}-\frac{1}{3}=\underset{\sim\sim}{\frac{7}{12}}\left(c_n-\frac{1}{3}\right)$$

となる.

オ　以上の結果より,$m=1,2,3,\cdots$ に対して

$$c_{2m}-\frac{1}{3}=\left(c_2-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{7}{12}\right)^{m-1}=\left(\frac{13}{18}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{7}{12}\right)^{m-1}$$

すなわち

$$c_{2m}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{7}{12}\right)^m}$$

が成り立つ.

(2)

カ と キ　3 次方程式の解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=3(1+i)\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=c\\ \alpha\beta\gamma=-2+i\end{cases}$$

であり, これを用いて

$$\begin{cases}u=\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{1}{3}\cdot3(1+i)=\underset{\sim\sim}{1+i}\\ v=\alpha\beta\gamma=\underset{\sim\sim\sim}{-2+i}\end{cases}$$

とわかる.

ク と ケ　三角形 **ABC** が正三角形であるための条件は

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

が成り立つことであり, これより

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

が成り立つ．

この両辺を 2 乗して整理すると

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$

が成り立ち，さらに変形すると

$$\begin{aligned}&(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0\\&(3u)^2-3c=0\\&c=3u^2\\&c=3(1+i)^2=3(2i)=\underset{\sim}{6i}\end{aligned}$$

とわかる．

これより，問題の z の 3 次方程式は

$$z^3-3uz^2+3u^2z+2-i=0$$

となり,α はその解であるから

$$\alpha^3-3u\alpha^2+3u^2\alpha+2-i=0$$

が成り立つ．これをさらに変形すると，

$$\begin{aligned}&(\alpha^3-3u\alpha^2+3u^2\alpha-u^3)+u^3+2-i=0\\&(\alpha-u)^3+u^3+2-i=0\\&w^3+u^3+2-i=0\\&w^3=-(1+i)^3-2+i=\underset{\sim}{-i}\end{aligned}$$

とわかる．

$\boxed{\text{コ}}$ u は三角形 **ABC** の重心に対応する複素数であるから,$w=\alpha-u\neq0$ であり，これより

$$(\alpha-u=)w=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(r>0,0\leqq\theta<2\pi)$$

と表すことができる．

$w^3=-i$ より

$$r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\quad(0\leqq3\theta<6\pi)$$

が成り立つから，

$$\begin{cases}r^3=1\\3\theta=\dfrac{3}{2}\pi,\dfrac{7}{2}\pi,\dfrac{11}{2}\pi\end{cases}\quad\text{すなわち}\quad\begin{cases}r=1\\\theta=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{7}{6}\pi,\dfrac{11}{6}\pi\end{cases}$$

が成り立ち，これより

$$\alpha=u+\cos\theta+i\sin\theta=1+i+\cos\theta+i\sin\theta=\begin{cases}1+2i\\\text{または}\\\left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)+\frac12i\\\text{または}\\\left(1+\frac{\sqrt3}{2}\right)+\frac12i\end{cases}$$

とわかる．

このことは,β,γ についても，同じように成り立つ．

α,β,γ は異なる 3 つの複素数であるから，以上の結果より

$$\{\alpha,\beta,\gamma\}=\left\{1+2i,\left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)+\frac12i,\left(1+\frac{\sqrt3}{2}\right)+\frac12i\right\}$$

となる (このとき，確かに,**A**,**B**,**C** は正三角形の 3 頂点になっている) ので,α,β,γ のそれぞれの実部の値のうち，最大の値は

$$\underset{\sim}{1+\frac{\sqrt3}{2}}$$

である．

〔Ⅱ〕

■解答例□

O を原点とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ -2,\ -4)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(2,\ -2,\ -4)$

点 E は直線 AC 上，点 G は直線 BC 上にあるから，p，q を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=(2,\ 0,\ 2)+p(-2,\ -2,\ -4)=(2-2p,\ -2p,\ 2-4p)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+q\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$=(-2,\ 0,\ 2)+q(2,\ -2,\ -4)=(-2+2q,\ -2q,\ 2-4q)$$

と表すことができる．点 E と点 G は xy 平面上にあるから，

$$2-4p=0 \quad すなわち \quad p=\frac{1}{2}$$
$$2-4q=0 \quad すなわち \quad q=\frac{1}{2}$$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1,\ -1,\ 0),\ \overrightarrow{\mathrm{OG}}=(-1,\ -1,\ 0)$$

より，$\mathrm{E}(1,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{G}(-1,\ -1,\ 0)$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-2,\ 2,\ -t-2)$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(2,\ 2,\ -t-2)$

点 F は直線 AD 上，点 H は直線 BD 上にあるから，r，s を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+r\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$=(2,\ 0,\ 2)+r(-2,\ 2,\ -t-2)=(2-2r,\ 2r,\ 2-r(t+2))$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$
$$=(-2,\ 0,\ 2)+s(2,\ 2,\ -t-2)=(-2+2s,\ 2s,\ 2-s(t+2))$$

と表すことができる．点 F と点 H は xy 平面上にあり，また，$t>0$ より $t+2\neq 0$ であるから，

$$2-r(t+2)=0 \quad すなわち \quad r=\frac{2}{t+2}$$
$$2-s(t+2)=0 \quad すなわち \quad s=\frac{2}{t+2}$$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\left(2-2\cdot\frac{2}{t+2},\ 2\cdot\frac{2}{t+2},\ 0\right)=\left(\frac{2t}{t+2},\ \frac{4}{t+2},\ 0\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(-2+2\cdot\frac{2}{t+2},\ 2\cdot\frac{2}{t+2},\ 0\right)=\left(-\frac{2t}{t+2},\ \frac{4}{t+2},\ 0\right)$$

より，$\mathrm{F}\left(\frac{2t}{t+2},\ \frac{4}{t+2},\ 0\right)$，$\mathrm{H}\left(-\frac{2t}{t+2},\ \frac{4}{t+2},\ 0\right)$

(3)　点 E と点 G，および点 F と点 H の y 座標がそれぞれ等しいので EG//FH であるから，xy 平面上の四角形 EFHG は EG//FH の台形となるので，

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{4t}{t+2}+2\right)\left\{\frac{4}{t+2}-(-1)\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(3t+2)}{t+2}\cdot\frac{t+6}{t+2}=\frac{(3t+2)(t+6)}{(t+2)^2}$$

したがって，

$$(t+2)^2S=(3t+2)(t+6)$$

(4)　$t\neq 0$ より，

$$S=\frac{(3t+2)(t+6)}{(t+2)^2}=\frac{3t^2+20t+12}{t^2+4t+4}=3+\frac{8t}{t^2+4t+4}=3+\frac{8}{t+4+\frac{4}{t}}$$

さらに，$t>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により，

$$S=3+\frac{8}{t+\frac{4}{t}+4}\leqq 3+\frac{8}{2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}+4}=3+\frac{8}{2\cdot 2+4}=4$$

等号が成り立つのは $t=\frac{4}{t}$ かつ $t>0$ のとき，すなわち $t=2$ のときである．

したがって，S は $t=2$ のとき 最大値 4 をとる．

〔 Ⅲ 〕

$C_1 : (x+2)^2 + y^2 = 1$

$C_2 : (x-3)^2 + y^2 = 4$

A$(-2,\ 0)$，B$(3,\ 0)$ とおく．

円 C_1 は中心が点 A，半径が 1，円 C_2 は中心が点 B，半径が 2 の円である．

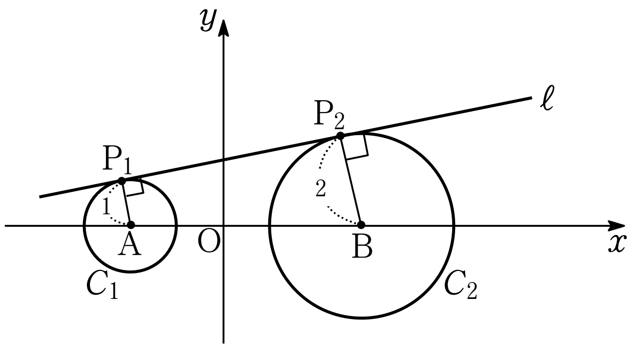
(1)　点 B$(3,\ 0)$ と直線 $x - 2\sqrt{6}y + 7 = 0$ ……①

の距離は

$$\frac{|3 - 2\sqrt{6}\cdot 0 + 7|}{\sqrt{1^2 + (-2\sqrt{6}\,)^2}} = \frac{10}{5} = \mathbf{2}$$

これは円 C_2 の半径なので，

① は円 C_2 と接している．



(2)　点 A と ① の距離は

$$\frac{|-2 - 2\sqrt{6}\cdot 0 + 7|}{\sqrt{1^2 + (-2\sqrt{6}\,)^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

これは円 C_1 の半径なので，① は円 C_1 と接している．

(1) も考えて ① は円 C_1，C_2 に接し，接点 P_1，P_2 の y 座標は正である．このような接線は 1 本しかないので，直線 ℓ は ① のことである．

直線 ℓ の法線ベクトルで y 成分が正のものに $\vec{n} = (-1,\ 2\sqrt{6}\,)$ があり $|\vec{n}| = 5$

O$(0,\ 0)$ として $\overrightarrow{\mathrm{OP_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{5}\vec{n} = (-2,\ 0) + \frac{1}{5}(-1,\ 2\sqrt{6}\,) = \left(-\frac{11}{5},\ \frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$

よって $\mathbf{P_1}\left(-\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{5}},\ \frac{\mathbf{2\sqrt{6}}}{\mathbf{5}}\right)$

(3)　円 D の中心を C$\left(-\frac{1}{5},\ \frac{12}{5}\right)$ とし，半径を r とする．

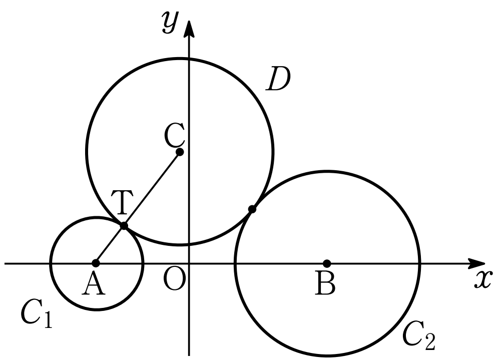
円 D が C_1，C_2 の両方に外接しているとするので，中心間の距離が半径の和と等しいことから

$\mathrm{AC} = 3 = 1 + r$

$\mathrm{BC} = 4 = 2 + r$

すなわち　$r = 2$

よって，円 D の半径は $\mathbf{2}$



このときの C_1 と D の接点を T とすると，

点 T は線分 AC を 1 : 2 に内分することから

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$= \frac{2}{3}(-2,\ 0) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5},\ \frac{12}{5}\right) = \left(-\frac{7}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

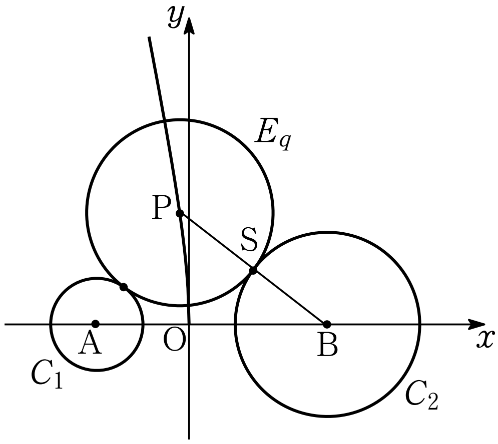
よって，求める接点の座標は $\left(-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}},\ \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\right)$

(4)　円 E_q の中心を $\mathrm{P}(p,\ q)$ $(q>0)$ とおき，半径を u とする．

円 E_q が C_1，C_2 の両方に外接しているとするので，中心間の距離が半径の和と等しいことから

$$\mathrm{AP}=1+u$$
$$\mathrm{BP}=2+u$$

すなわち　$\mathrm{BP}-\mathrm{AP}=1$



点 P は頂点間の距離が 1，焦点が A，B の双曲線上に存在する．

この双曲線の中心は線分 AB の中点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ であり，これを x 軸方向に $-\dfrac{1}{2}$ だけ平行移動すると，焦点が $\left(\pm\dfrac{5}{2},\ 0\right)$ であることに注意して，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の満たす方程式は

$$4\left(p-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{q^2}{6}=1 \quad \cdots\cdots②$$

ただし，$q>0$ であり，$\mathrm{BP}>\mathrm{AP}$ であることから $p<\dfrac{1}{2}$

② から　$\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{q^2+6}{24}$

$p-\dfrac{1}{2}<0$ なので　$p-\dfrac{1}{2}=-\sqrt{\dfrac{q^2+6}{24}}$

よって　$\boldsymbol{p=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{6q^2+36}}{12}}$　$\cdots\cdots③$

$$\lim_{q\to\infty}\frac{p}{q}=\lim_{q\to\infty}\left(\frac{1}{2q}-\frac{1}{12}\sqrt{6+\frac{36}{q^2}}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{12}=\boldsymbol{-\frac{1}{2\sqrt{6}}} \quad \cdots\cdots④$$

(5)　(4) の円 E_q と C_2 の接点を $\mathrm{S}(s,\ t)$ とする．

②から　$q^2=24p^2-24p$　……②′

③から $q\to\infty$ のとき $p\to-\infty$

$$\mathrm{BP}=\sqrt{(p-3)^2+q^2}=\sqrt{25p^2-30p+9}\ (\because ②')$$
$$=\sqrt{(5p-3)^2}=|5p-3|$$
$$=-(5p-3)\ (\because 5p-3<0)$$

$\mathrm{BS}=2$

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{BP}}\overrightarrow{\mathrm{BP}}$$

すなわち

$$(s,\ t)=(3,\ 0)-\frac{2}{5p-3}(p-3,\ q)$$
$$=\left(3-\frac{2p-6}{5p-3},\ -\frac{2q}{5p-3}\right)$$

よって

$$\lim_{q\to\infty}s=\lim_{p\to-\infty}\left(3-\frac{2p-6}{5p-3}\right)$$
$$=\lim_{p\to-\infty}\left(3-\frac{2-\frac{6}{p}}{5-\frac{3}{p}}\right)=3-\frac{2}{5}$$
$$=\boldsymbol{\frac{13}{5}}$$

$$\lim_{q\to\infty}t=\lim_{q\to\infty}\left(-\frac{2q}{5p-3}\right)$$
$$=\lim_{q\to\infty}\left(-\frac{2}{5\cdot\frac{p}{q}-\frac{3}{q}}\right)=-\frac{2}{5\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)}\ (\because ④)$$
$$=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{6}}{5}}$$

〔IV〕

■ 解答例 □

(1) $f_n(x) = e^{-2px}\cos(nx)$，$g_n(x) = e^{-2px}\sin(nx)$ とすると，

$$f_n'(x) = \left(e^{-2px}\right)'\cos(nx) + e^{-2px}\{\cos(nx)\}'$$
$$= -2pe^{-2px}\cos(nx) - ne^{-2px}\sin(nx) = -2pf_n(x) - ng_n(x) \quad \cdots\cdots①$$
$$g_n'(x) = \left(e^{-2px}\right)'\sin(nx) + e^{-2px}\{\sin(nx)\}'$$
$$= -2pe^{-2px}\sin(nx) + ne^{-2px}\cos(nx) = nf_n(x) - 2pg_n(x) \quad \cdots\cdots②$$

①，② から $g_n(x)$ を消去して，

$$f_n(x) = \frac{-2p}{4p^2+n^2}f_n'(x) + \frac{n}{4p^2+n^2}g_n'(x)$$

C_1 を積分定数として，

$$\int f_n(x)\,dx = \frac{-2p}{4p^2+n^2}f_n(x) + \frac{n}{4p^2+n^2}g_n(x) + C_1$$
$$= \frac{e^{-2px}}{4p^2+n^2}\{-2p\cos(nx) + n\sin(nx)\} + C_1 \quad \cdots\cdots③$$

③ に $n=1$ を代入して，

$$\int f_1(x)\,dx = \int e^{-2px}\cos x\,dx = \underline{\frac{e^{-2px}}{4p^2+1}(-2p\cos x + \sin x) + C_1}$$

同様に，①，② から $f_n(x)$ を消去して，

$$g_n(x) = \frac{-n}{4p^2+n^2}f_n'(x) - \frac{2p}{4p^2+n^2}g_n'(x)$$

C_2 を積分定数として，

$$\int g_n(x)\,dx = \frac{-n}{4p^2+n^2}f_n(x) - \frac{2p}{4p^2+n^2}g_n(x) + C_2$$
$$= \frac{e^{-2px}}{4p^2+n^2}\{-n\cos(nx) - 2p\sin(nx)\} + C_2 \quad \cdots\cdots④$$

④ に $n=1$ を代入して，

$$\int g_1(x)\,dx = \int e^{-2px}\sin x\,dx = \underline{\frac{e^{-2px}}{4p^2+1}(-\cos x - 2p\sin x) + C_2}$$

(2) $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ なので，③ より，

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2px}\cos(nx)\,dx = \left[\frac{e^{-2px}}{4p^2+n^2}\{-2p\cos(nx)+n\sin(nx)\}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{e^{-\pi p}}{4p^2+n^2}\left\{-2p\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}+\frac{2p}{4p^2+n^2} \quad \cdots\cdots ⑤$$

これより，$n=0$ のとき，

$$I_0 = \frac{-2p}{4p^2}\cdot e^{-\pi p}+\frac{2p}{4p^2} = \underline{\frac{1}{2p}(1-e^{-\pi p})}$$

また，$\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$ なので，$n=2$ のとき，

$$I_2 = \frac{2p}{4p^2+4}\cdot e^{-\pi p}+\frac{2p}{4p^2+4} = \underline{\frac{p}{2p^2+2}(1+e^{-\pi p})}$$

(3) ⑤ より，

$$I_n - \frac{2p}{4p^2+n^2} = \frac{e^{-\pi p}}{4p^2+n^2}\left\{n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-2p\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{e^{-\pi p}}{4p^2+n^2}\cdot\sqrt{n^2+(-2p)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\alpha_n\right)$$

$$= \frac{e^{-\pi p}}{\sqrt{4p^2+n^2}}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\alpha_n\right)$$

$$\left(\text{ただし，}\cos\alpha_n = \frac{n}{\sqrt{4p^2+n^2}},\ \sin\alpha_n = \frac{-2p}{\sqrt{4p^2+n^2}}\right)$$

$\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\alpha_n\right)\right| \leqq 1$, $p>0$, $n^2 \geqq 1$ であるので，

$$\left|I_n - \frac{2p}{4p^2+n^2}\right| \leqq \frac{e^{-\pi p}}{\sqrt{4p^2+n^2}} < e^{-\pi p}$$

以上より，1 以上の整数 n に対して $\left|I_n - \frac{2p}{4p^2+n^2}\right| \leqq e^{-\pi p}$ は成り立つ．

（証明了）

(4) I_4 を計算すると，$\cos 2\pi = 1$，$\sin 2\pi = 0$ なので，⑤ より，

$$I_4 = \frac{-2p}{4p^2+16}e^{-\pi p} + \frac{2p}{4p^2+16} = \frac{p}{2p^2+8}\left(1-e^{-\pi p}\right)$$

これと (2) より，

$$\begin{aligned}
&I_0 I_4 - {I_2}^2 \\
&= \frac{1}{2p}\left(1-e^{-\pi p}\right)\cdot\frac{p}{2p^2+8}\left(1-e^{-\pi p}\right) - \left\{\frac{p}{2p^2+2}\left(1+e^{-\pi p}\right)\right\}^2 \\
&= \frac{1}{4p^2+16}\left(1-e^{-\pi p}\right)^2 - \frac{p^2}{\left(2p^2+2\right)^2}\left(1+e^{-\pi p}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\cdot\left\{\frac{\left(1-e^{-\pi p}\right)^2}{p^2+4} - \frac{p^2\left(1+e^{-\pi p}\right)^2}{\left(p^2+1\right)^2}\right\} \\
&= \frac{\left(p^2+1\right)^2\left(1-e^{-\pi p}\right)^2 - p^2\left(p^2+4\right)\left(1+e^{-\pi p}\right)^2}{4\left(p^2+4\right)\left(p^2+1\right)^2} \\
&= \frac{\left(p^4+2p^2+1\right)\left(1-2e^{-\pi p}+e^{-2\pi p}\right) - \left(p^4+4p^2\right)\left(1+2e^{-\pi p}+e^{-2\pi p}\right)}{4\left(p^2+4\right)\left(p^2+1\right)^2} \\
&= \frac{\left(-2p^2+1\right) - 2\left(2p^4+6p^2+1\right)e^{-\pi p} + \left(-2p^2+1\right)e^{-2\pi p}}{4\left(p^2+4\right)\left(p^2+1\right)^2} \\
&= \frac{\left(-2p^{-4}+p^{-6}\right) - 2\left(2p^{-2}+6p^{-4}+p^{-6}\right)e^{-\pi p} + \left(-2p^{-4}+p^{-6}\right)e^{-2\pi p}}{4\left(1+\frac{4}{p^2}\right)\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^2}
\end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{aligned}
&p^c\left(I_0 I_4 - {I_2}^2\right) \\
&= \frac{p^{c-4}\left(-2+p^{-2}\right) - 2\left(2p^{c-2}+6p^{c-4}+p^{c-6}\right)e^{-\pi p} + \left(-2p^{c-4}+p^{c-6}\right)e^{-2\pi p}}{4\left(1+\frac{4}{p^2}\right)\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^2}
\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{p\to\infty} p^r e^{-\pi p} = 0$ より，$\displaystyle\lim_{p\to\infty}\left(2p^{c-2}+6p^{c-4}+p^{c-6}\right)e^{-\pi p} = 0$，

$\displaystyle\lim_{p\to\infty}\left(-2p^{c-4}+p^{c-6}\right)e^{-2\pi p} = \lim_{p\to\infty}\left\{\left(-2p^{c-4}+p^{c-6}\right)e^{-\pi p}\right\}\cdot e^{-\pi p} = 0$ であり，

$\displaystyle\lim_{p\to\infty} 4\left(1+\frac{4}{p^2}\right)\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^2 = 4$ であるので，

$$\lim_{p\to\infty} p^c\left(I_0 I_4 - {I_2}^2\right) = \begin{cases} -\infty & (c-4>0 \text{ のとき}) \\ -\dfrac{1}{2} & (c-4=0 \text{ のとき}) \\ 0 & (c-4<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

以上より，$p\to\infty$ のとき $p^c\left(I_0 I_4 - {I_2}^2\right)$ が 0 でないある定数 α に収束するための条件は，$c=4$

その収束値 α は，$\alpha = -\dfrac{1}{2}$