〔I〕

(1) $\boxed{ア}$ $\dfrac{5}{9}$　$\boxed{イ}$ $\dfrac{5}{14}$　$\boxed{ウ}$ $\dfrac{5}{14}$　$\boxed{エ}$ $\dfrac{77}{153}$　$\boxed{オ}$ $\dfrac{611}{1224}$

(2) $\boxed{カ}$ 0　$\boxed{キ}$ 0　$\boxed{ク}$ 125　$\boxed{ケ}$ $3\sqrt{2}$　$\boxed{コ}$ 6

■解説□

(1)　3で割ったときの余りが0，1，2であるような1以上9以下の整数の集合をそれぞれX，Y，Zとする．すなわち，

$$X=\{3,\ 6,\ 9\},\quad Y=\{1,\ 4,\ 7\},\quad Z=\{2,\ 5,\ 8\}$$

である．

袋αから3数を取り出すとき，これらの順列は全部で${}_9\mathrm{P}_3$通りだけある．

mが奇数になるための条件は，3回目に奇数を取り出すことである．3回目に取り出す奇数の選び方は5通りだけあり，1，2回目に取り出す数の順列は${}_8\mathrm{P}_2$通りだけあるから，

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{5\cdot{}_8\mathrm{P}_2}{{}_9\mathrm{P}_3} \\ &= \frac{280}{{}_9\mathrm{P}_3}=\frac{5}{9} \end{aligned}$$

である．

mが3の倍数であることは，mの各位の数の合計が3の倍数となることと同値である．よってmが3の倍数となるための条件は，次の(i)〜(iv)のいずれかが成り立つことである．

(i)　Xの要素から取り出した3数を並べてmを作る．

(ii)　Yの要素から取り出した3数を並べてmを作る．

(iii)　Zの要素から取り出した3数を並べてmを作る．

(iv)　X，Y，Zのそれぞれの要素から1つずつ取り出した3数を並べてmを作る．

Xの要素の3個を並べる方法の総数は$3!$であり，Yの要素の3個，Zの要素の3個を並べる方法の総数もこれに等しい．よって（i），(ii)，(iii)のような3数の取り出し方はそれぞれ$3!$通りずつある．また，X，Y，Zのそれぞれの要素から1つずつ取り出す3数の選び方は$({}_3\mathrm{C}_1)^3$通りだけあり，これらの並べ方は$3!$通りだけある．よって(iv)のような3数の取り出し方は$({}_3\mathrm{C}_1)^3\cdot 3!$通りだけある．以上より，

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{3!+3!+3!+({}_3\mathrm{C}_1)^3\cdot 3!}{{}_9\mathrm{P}_3} \\ &= \frac{5}{14} \end{aligned}$$

である．

mが奇数の3の倍数となるような確率$P(A\cap B)$を求めよう．mが奇数となるためには，一の位の数，すなわち3回目に取り出した数が1，3，5，7，9であることが必要である．

3回目に1を取り出す場合にmが3の倍数となるための条件は，(1，2回目において1以外のYの要素である4，7が取り出される ⋯①)，または（1，2回目においてXの要素のうちの1つとZの要素のうちの1つが取り出される ⋯②）ことである．$P(B)$を求めたときと同様に考えると，①，②のような3数の取り出し方は，それぞれ$2!$，$({}_3\mathrm{C}_1)^2\cdot 2!$通りだけある．よって，3の

倍数である m のうち一の位が 1 であるような 3 数の取り出し方は $2!+({}_3\mathrm{C}_1)^2\cdot 2!=20$ 通りだけある．3 回目に 3，5，7，9 を取り出す場合もこれと同様なので，結局 m が奇数の 3 の倍数となるような 3 数の取り出し方の総数は $5\cdot 20=100$ となり，$P(A\cap B)=\dfrac{100}{{}_9\mathrm{P}_3}$ である．よって，

$$
\begin{aligned}
P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} &= \frac{100}{280}\\
&= \frac{5}{14}
\end{aligned}
$$

である．

袋 β の中の札のすべてに区別を与えると，ここから 3 数を取り出すとき，これらの順列は全部で ${}_{18}\mathrm{P}_3$ 通りだけある．

$n>550$ となるための条件は，次の (v)〜(vii) のいずれかが成り立つことである．

(v)　1 回目に 6 以上 9 以下の整数を取り出す．

(vi)　1 回目に 5 を取り出し，かつ 2 回目に 6 以上 9 以下の整数を取り出す．

(vii)　1，2 回目においてともに 5 を取り出す．

札に区別を与えたことに注意すると，1 回目に 6 を取り出す方法は 2 通りだけあり，この場合 2，3 回目の取り出し方は ${}_{17}\mathrm{P}_2$ 通りだけある．1 回目に 7，8，9 を取り出す場合も同様なので，(v) のような 3 数の取り出し方は $4\cdot 2\cdot {}_{17}\mathrm{P}_2$ 通りだけある．同様に考えると (vi)，(vii) のような 3 数の取り出し方はそれぞれ $2\cdot 4\cdot 2\cdot {}_{16}\mathrm{P}_1$，$2\cdot {}_{16}\mathrm{P}_1$ 通りだけある．以上より，

$$
\begin{aligned}
P(C) &= \frac{4\cdot 2\cdot {}_{17}\mathrm{P}_2+2\cdot 4\cdot 2\cdot {}_{16}\mathrm{P}_1+2\cdot {}_{16}\mathrm{P}_1}{{}_{18}\mathrm{P}_3}\\
&= \frac{77}{153}
\end{aligned}
$$

である．

袋 α にも袋 β にも 1 から 9 までの整数が書かれた札が均等に入れられているのだから，$m<n$ となる確率は $m>n$ となる確率に等しく，これより $m<n$ または $m>n$，すなわち $m\neq n$ となる確率は $2P(D)$ である　$\cdots$③．

$m=n$ となる確率を求めよう．袋 β には同じ番号が書かれた札が 2 枚ずつ入れられているから，n が m に等しくなるような取り出し方は，どんな m に対しても 2^3 通りだけある．よって $m=n$ となる確率は，$1\cdot\dfrac{2^3}{{}_{18}\mathrm{P}_3}=\dfrac{1}{612}$ であり，余事象を考えることにより $m\neq n$ となる確率は $1-\dfrac{1}{612}=\dfrac{611}{612}$ となる．これと ③ より，

$$
2P(D)=\frac{611}{612}\qquad \therefore P(D)=\frac{611}{1224}
$$

である．

(2)　題意の正三角形は原点を中心とする円に内接する，すなわちその外心は原点であり，よって β，γ は，これらの可換性もふまえ，原点を中心として α をそれぞれ $\dfrac{2\pi}{3}$，$\dfrac{4\pi}{3}$ だけ回転して得られる点であるとしてよい．これより，$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ とすれば $\beta=\omega\alpha$，$\gamma=\omega^2\alpha$ とできる．また，

$$
\begin{aligned}
\omega^3 &= \left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3\\
&= \cos 2\pi+i\sin 2\pi\\
&= 1 \quad\cdots ④
\end{aligned}
$$

であり，さらに

$$\omega^3 - 1 = 0$$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \ \cdots ⑤ \qquad (\because \omega \neq 1)$$

である．

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= \alpha + \omega\alpha + \omega^2\alpha \\ &= (\omega^2 + \omega + 1)\alpha \\ &= 0 \ \cdots ⑥ \qquad (\because ⑤) \end{aligned}$$

となり，よって $|\alpha + \beta + \gamma| = 0$ である．また，

$$\begin{aligned} \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= \alpha \cdot \omega\alpha + \omega\alpha \cdot \omega^2\alpha + \omega^2\alpha \cdot \alpha \\ &= \omega(\omega^2 + \omega + 1)\alpha^2 \\ &= 0 \ \cdots ⑦ \qquad (\because ⑤) \end{aligned}$$

となり，よって $|\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha| = 0$ である．さらに，

$$\begin{aligned} \alpha\beta\gamma &= \alpha \cdot \omega\alpha \cdot \omega^2\alpha \\ &= \omega^3\alpha^3 = \alpha^3 \qquad (\because ④) \end{aligned}$$

となり，

$$\begin{aligned} |\alpha\beta\gamma| &= |\alpha|^3 \\ &= \left(\sqrt{23 + 2}\right)^3 = 125 \end{aligned}$$

となる．

題意の平行移動についての条件から，$\alpha' = \alpha - 1 + i$，$\beta' = \beta - 1 + i$，$\gamma' = \gamma - 1 + i$ であるから，

$$\begin{aligned} \alpha' + \beta' + \gamma' &= \alpha + \beta + \gamma + 3(-1 + i) \\ &= 3(-1 + i) \qquad (\because ⑥) \end{aligned}$$

となり，よって $|\alpha' + \beta' + \gamma'| = |3(-1 + i)| = 3\sqrt{2}$ である．また，

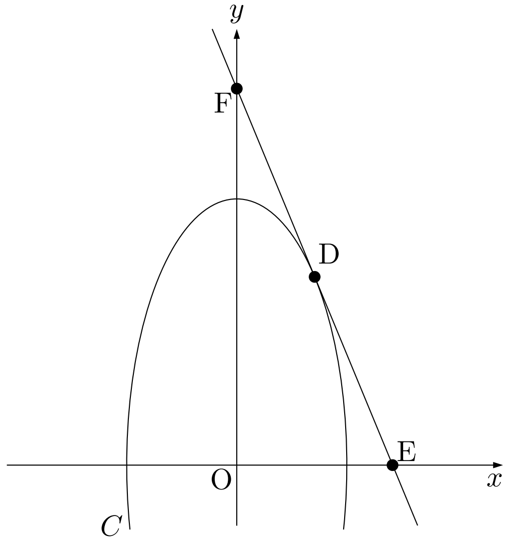
$$\begin{aligned} \alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\alpha' &= (\alpha - 1 + i)(\beta - 1 + i) + (\beta - 1 + i)(\gamma - 1 + i) + (\gamma - 1 + i)(\alpha - 1 + i) \\ &= \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 2(-1 + i)(\alpha + \beta + \gamma) + 3(-1 + i)^2 \\ &= 3(-1 + i)^2 \qquad (\because ⑥，⑦) \end{aligned}$$

となり，よって $|\alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\alpha'| = |3(-1 + i)^2| = 3 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 6$ である．

〔**II**〕

■ 解答例 □

(1) 点 $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{k},\, k\right)$ における楕円 C の接線の方程式は，



$$\frac{k^2}{2}\cdot\frac{1}{k}x+\frac{1}{2k^2}\cdot ky=1$$

$$\frac{k}{2}x+\frac{1}{2k}y=1$$

これより，x 軸との交点の x 座標は，

$$\frac{k}{2}x=1 \qquad \text{これを解いて，} x=\frac{2}{k}$$

また，y 軸との交点の y 座標は，

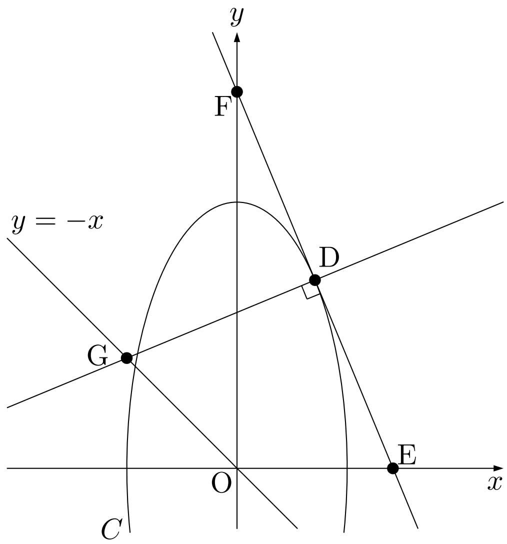
$$\frac{1}{2k}y=1 \qquad \text{これを解いて，} y=2k$$

以上より，$\mathrm{E}\left(\dfrac{2}{k},\, 0\right)$，$\mathrm{F}(0,\, 2k)$

(2) (1) より，接線の方程式を整理すると，

$$y=-k^2x+2k$$

また，点 D における楕円 C の法線の方程式は，



$k>1$ より，$k^2\neq 0$ であることから，

$$y-k=\frac{1}{k^2}\left(x-\frac{1}{k}\right)$$

整理して，$y=\dfrac{1}{k^2}x+k-\dfrac{1}{k^3}$

これより，$y=-x$ との交点について調べると，

$$-x=\frac{1}{k^2}x+k-\frac{1}{k^3}$$

$$k\left(k^2+1\right)x+\left(k^4-1\right)=0$$

$$\left(k^2+1\right)\left(kx+k^2-1\right)=0$$

$k^2+1\neq 0$ であることから，$x=-k+\dfrac{1}{k}$

以上より，$\mathrm{G}\left(-k+\dfrac{1}{k},\, k-\dfrac{1}{k}\right)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{GE}}=\left(k+\dfrac{1}{k},\, -k+\dfrac{1}{k}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{GF}}=\left(k-\dfrac{1}{k},\, k+\dfrac{1}{k}\right)$ であり，

$$\mathrm{GE}=\left|\overrightarrow{\mathrm{GE}}\right|=\sqrt{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2+\left(-k+\frac{1}{k}\right)^2}=\sqrt{2\left(k^2+\frac{1}{k^2}\right)}$$

$$\mathrm{GF}=\left|\overrightarrow{\mathrm{GF}}\right|=\sqrt{\left(k-\frac{1}{k}\right)^2+\left(k+\frac{1}{k}\right)^2}=\sqrt{2\left(k^2+\frac{1}{k^2}\right)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GF}}=\left(k+\frac{1}{k}\right)\left(k-\frac{1}{k}\right)+\left(-k+\frac{1}{k}\right)\left(k+\frac{1}{k}\right)=k^2-\frac{1}{k^2}-k^2+\frac{1}{k^2}=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{GE}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{GF}}\neq\vec{0}$ であることから，$\angle\mathrm{EGF}=\dfrac{\pi}{2}$

(3) (2) より，△GEF の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{GE}\cdot\mathrm{GF}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\left(k^2+\dfrac{1}{k^2}\right)=k^2+\dfrac{1}{k^2}$

また，△OEF の面積 T は，$T=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{k}\cdot 2k=2$

ここで，$S=\sqrt{2}T$ のとき，

$$k^2+\frac{1}{k^2}=2\sqrt{2}$$

$$\left(k^2\right)^2-2\sqrt{2}k^2+1=0$$

$$k^2=\sqrt{2}\pm\sqrt{2-1}=\sqrt{2}\pm 1$$

であるので，$k>1$ より，$k^2>1$ に注意すると，$\underline{k^2=\sqrt{2}+1}$

さらにこのとき，$\mathrm{OE}=\dfrac{2}{k}$，$\mathrm{OF}=2k$ であることから，

$$\tan\angle\mathrm{OEF}=\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OE}}=\frac{2k}{\frac{2}{k}}=k^2=\sqrt{2}+1$$

これを用いると，

$$\tan 2\angle\mathrm{OEF}=\frac{2\tan\angle\mathrm{OEF}}{1-\tan^2\angle\mathrm{OEF}}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{1-\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{-2\left(\sqrt{2}+1\right)}=-1$$

$0<\angle\mathrm{OEF}<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<2\angle\mathrm{OEF}<\pi$ であることに注意すると，

$$2\angle\mathrm{OEF}=\frac{3}{4}\pi$$

以上より，$\underline{\angle\mathrm{OEF}=\dfrac{3}{8}\pi}$

〔Ⅲ〕

■解答例□

(1)　題意で与えられた等式 $(n+3)a_{n+1}-(n+1)a_n=2(n+1)$（……①）で $n=1$ として，さらに $a_1=1$ をふまえると，

$$4a_2-2a_1=4$$

$$4a_2-2=4$$

$$a_2=\frac{3}{2}$$

題意で与えられた等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kb_k=a_n\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$（……②）で $n=2$ として，さらに $a_2=\dfrac{3}{2}$，$b_1=1$ をふまえると，

$$1\cdot b_1+2\cdot b_2=a_2(b_1+b_2)$$

$$1+2b_2=\frac{3}{2}(1+b_2)$$

$$b_2=1$$

となる．

(2)　$c_1=3\cdot 2a_1=6$ である．

①の両辺に $n+2$ をかけて，

$$(n+3)(n+2)a_{n+1}-(n+2)(n+1)a_n=2(n+1)(n+2)$$

よって，

$$c_{n+1}-c_n=2(n+1)(n+2)$$

を得る．

(3)　(2) の結果から数列 $\{c_n\}$ の階差数列の一般項が $2(n+1)(n+2)$ であるので，$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}c_n&=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}2(k+1)(k+2)\\&=6+\sum_{k=1}^{n}2k(k+1)-2\cdot 1\cdot 2\\&=2+\frac{2}{3}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

となる．上式は $n=1$ のときも満足する．よって，$n \geqq 1$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{c_n}{(n+1)(n+2)} \\ &= \underline{\frac{2}{(n+1)(n+2)} + \frac{2}{3}n} \end{aligned}$$

である．

(4)　$n \geqq 2$ のとき，②と，②で n を $n-1$ として得られる式を辺々引いて，

$$\sum_{k=1}^{n} kb_k - \sum_{k=1}^{n-1} kb_k = a_n\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) - a_{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k\right)$$

$$nb_n = a_n\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) - a_{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k\right)$$

を得る．これと題意で与えられた等式とから，

$$nb_n = a_nb_n + (a_n - a_{n-1})s_{n-1}$$

が得られる．加えて $b_n = d_ns_{n-1}$ であることもふまえれば，

$$nd_ns_{n-1} = a_nd_ns_{n-1} + (a_n - a_{n-1})s_{n-1}$$

$$\{(n-a_n)d_n - (a_n - a_{n-1})\}s_{n-1} = 0$$

となり，$n \geqq 2$ を満たす各々の n に対して

$$(n-a_n)d_n = a_n - a_{n-1} \quad \text{または} \quad s_{n-1} = 0$$

が成り立つことがわかる．

(i)　$(n-a_n)d_n = a_n - a_{n-1}$ が成り立つとき，これと (3) の結果から，

$$\left\{n - \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{2}{3}n\right\}d_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)} + \frac{2}{3}n - \frac{2}{n(n+1)} - \frac{2}{3}(n-1)$$

$$\left\{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - 2\right\}d_n = 2 - \frac{2(n+2)}{n} + \frac{2}{3}(n+1)(n+2)$$

$$\left\{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - 2\right\}d_n = \frac{2}{n}\left\{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - 2\right\} \quad \cdots\cdots ③$$

となる．$n \geqq 2$ において数列 $\left\{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\right\}$ は単調増加列であるから，$n \geqq 2$ において

$$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - 2 \geqq \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 2 > 0$$

が成り立つ．これと③より，$d_n = \frac{2}{n}$ となる．

(ii)　$s_{n-1} = 0$ が成り立つとき，②で n を $n-1$ として得られる式 $\sum_{k=1}^{n-1} kb_k = a_{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k\right)$ を用いると，

$$\sum_{k=1}^{n-1} kb_k = a_{n-1}s_{n-1} \quad \text{すなわち} \quad \sum_{k=1}^{n-1} kb_k = 0$$

となる．上式かつ $s_{n-1}=0$ より，②は，

$$\sum_{k=1}^{n-1} kb_k + nb_n = a_n s_{n-1} + a_n b_n$$

$$(n-a_n)b_n = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

と変形できる．ここで (3) の結果から，$n \geqq 2$ において，

$$\begin{aligned} n - a_n &= n - \left\{ \frac{2}{(n+1)(n+2)} + \frac{2}{3}n \right\} \\ &= \frac{n}{3} - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \\ &\geqq \frac{2}{3} - \frac{2}{(2+1)(2+2)} \\ &= \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．これと④より $b_n = 0$ となる．

よって $s_{n-1}=0$ が成り立つときは $b_n=0$ となり，これより式 $b_n = d_n s_{n-1}$ を満たす d_n は任意である．

(i)，(ii)より，2 以上のあらゆる整数 n に対して等式 $b_n = d_n s_{n-1}$ を満たす d_n は $d_n = \dfrac{2}{n}$ である．

(5)　(4) の結果から，$n \geqq 2$ において $b_n = d_n s_{n-1}$ かつ $d_n = \dfrac{2}{n}$ が成り立つから，これら 2 式から d_n を消去して，

$$b_n = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$nb_n = 2\sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad \cdots\cdots ⑤$$

を得る．⑤で n を $n+1$ として得られる式と⑤を辺々引くことにより，$n \geqq 2$ において，

$$(n+1)b_{n+1} - nb_n = 2\left(\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \right)$$

$$(n+1)b_{n+1} = (n+2)b_n$$

$$\frac{b_{n+1}}{n+2} = \frac{b_n}{n+1}$$

が成り立つことがわかる．よって $n \geqq 2$ において数列 $\left\{ \dfrac{b_n}{n+1} \right\}$ は定数数列であり，

$$\frac{b_n}{n+1} = \frac{b_2}{3} \quad \text{すなわち} \quad b_n = \frac{1}{3}(n+1)$$

〔Ⅳ〕

■解答例□

(1) $$f'(x)=2\sin x\cos x+4\sin x+4x\cos x-4\sin x=2\cos x(\sin x+2x)$$

$F(x)=\sin x+2x$ とおくと，

$$F'(x)=\cos x+2>0$$

より開区間 $(2n\pi-2\pi,\ 2n\pi)$ において，$F(x)$ は単調に増加する関数であり，

$$F(2n\pi-2\pi)=4\pi(n-1)\geqq 0$$

が成り立つので開区間 $(2n\pi-2\pi,\ 2n\pi)$ において，$F(x)>0$ である．

したがって，$f'(x)$ の符号は $\cos x$ の符号と一致する．

よって，$f(x)$ の増減は以下のようになる．

x	$(2n\pi-2\pi)$	$\cdots$	$2n\pi-\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$2n\pi-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$(2n\pi)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$8n\pi-6\pi+1$	$\searrow$	$-8n\pi+2\pi+1$	$\nearrow$	

上の増減表より，

$$\begin{cases}\text{極大値は } 8n\pi-6\pi+1\\ \text{極小値は } -8n\pi+2\pi+1\end{cases}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int f(x)dx&=\int\left\{\frac{1-\cos 2x}{2}+4x(-\cos x)'+4\cos x\right\}dx\\&=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+4\{x(-\cos x)-1\cdot(-\sin x)\}+4\sin x+C\\&=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x-4x\cos x+8\sin x+C\quad\text{（ただし, }C\text{ は積分定数）}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{cases}g(x)=x-\sin x\\ h(x)=\sin x-\dfrac{3}{\pi}x\end{cases}$$

とおくと，

$$\begin{cases}g'(x)=1-\cos x>0 & \left(0<x<\dfrac{\pi}{6}\right)\\ h'(x)=\cos x-\dfrac{3}{\pi}\end{cases}$$

となる．$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{6}$ において $h'(x)$ は単調に減少する関数であり，

$$\begin{cases} h'(0) = 1 - \dfrac{3}{\pi} > 1 - \dfrac{3}{3.1} > 0 \\ h'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{\pi} < \dfrac{1.8}{2} - \dfrac{3}{3.2} = \dfrac{5.76-6}{2 \times 3.2} < 0 \end{cases}$$

であることに注意すると，

$$h'(\alpha) = 0 \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{6}\right)$$

を満たす実数 α がただ 1 つ存在し，これを用いると $g(x)$，$h(x)$ の増減は以下のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

上の 2 つの増減表より，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{6}$ において

$$g(x) \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad h(x) \geqq 0$$

すなわち $\dfrac{3}{\pi}x \leqq \sin x \leqq x$ が成り立つ．

（証明了）

(4)　すべての自然数 n に対して，

$$2n\pi - \frac{\pi}{2} < 2n\pi - \frac{1}{n\pi} < 2n\pi$$

が成り立つから，(1) の増減表より開区間 $\left(2n\pi - \dfrac{1}{n\pi},\ 2n\pi\right)$ において，$f(x)$ は単調に増加する関数である．また，

$$f(2n\pi) = 4 > 0$$

さらに，

$$\begin{aligned} f\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right) &= \sin^2\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right) + 4\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right)\sin\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right) + 4\cos\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right) \\ &= \sin^2\frac{1}{n\pi} - 4\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right)\sin\frac{1}{n\pi} + 4\cos\frac{1}{n\pi} \\ &= \sin^2\frac{1}{n\pi} - 8n\pi\sin\frac{1}{n\pi} + \frac{4}{n\pi}\sin\frac{1}{n\pi} + 4\cos\frac{1}{n\pi} \\ &< 1 - 8n\pi\sin\frac{1}{n\pi} + \frac{4}{n\pi} + 4 \end{aligned}$$

ここで，

$$\frac{n\pi^2}{6} > \frac{1\times 3.1^2}{6} = \frac{9.61}{6} > 1$$

より $0 < \dfrac{1}{n\pi} < \dfrac{\pi}{6}$ が成り立つので，(3) の結果より，

$$\begin{aligned} f\left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right) &< 1 - 8n\pi\sin\frac{1}{n\pi} + \frac{4}{n\pi} + 4 \\ &\leqq 1 - 8n\pi\cdot\frac{3}{\pi}\cdot\frac{1}{n\pi} + \frac{4}{1\cdot\pi} + 4 \\ &= 5 - \frac{20}{\pi} \\ &< 5 - \frac{20}{3.2} \\ &= \frac{5\times 3.2 - 20}{3.2} < 0 \end{aligned}$$

であるから，中間値の定理より開区間 $\left(2n\pi - \dfrac{1}{n\pi},\ 2n\pi\right)$ において，$f(x)=0$ はただ 1 つの実数解をもつ．

（証明了）

(5)　(4) の結果より

$$\begin{cases} 2n\pi - \dfrac{1}{n\pi} < p_n < 2n\pi \\ 2(n+1)\pi - \dfrac{1}{(n+1)\pi} < p_{n+1} < 2(n+1)\pi \end{cases}$$

が成り立ち，これより

$$\begin{cases} 0 < 2n\pi - p_n < \dfrac{1}{n\pi} \\ 0 < 2(n+1)\pi - p_{n+1} < \dfrac{1}{(n+1)\pi} \end{cases} \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\pi} = 0$$

であるから，①と合わせて考えると

$$\lim_{n\to\infty}(2n\pi - p_n) = \lim_{n\to\infty}\{2(n+1)\pi - p_{n+1}\} = 0 \quad \cdots\cdots②$$

が成り立つ．

　ここで，(2) の結果を用いると

$$\int_{p_n}^{p_{n+1}} f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - 4x\cos x + 8\sin x\right]_{p_n}^{p_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n) - \frac{1}{4}(\sin 2p_{n+1} - \sin 2p_n) + 8(\sin p_{n+1} - \sin p_n)$$

$$-4(p_{n+1}\cos p_{n+1} - p_n \cos p_n) \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立ち，②を用いると，

$$\lim_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) = \lim_{n\to\infty}\{2n\pi - p_n - 2(n+1)\pi + p_{n+1} + 2\pi\} = 0 - 0 + 2\pi = 2\pi$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sin 2p_{n+1} - \sin 2p_n) &= \lim_{n\to\infty}\{\sin(2p_{n+1} - 4(n+1)\pi) - \sin(2p_n - 4n\pi)\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\{-\sin(4(n+1)\pi - 2p_{n+1}) + \sin(4n\pi - 2p_n)\}\\ &= -0 + 0 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sin p_{n+1} - \sin p_n) &= \lim_{n\to\infty}\{\sin(p_{n+1} - 2(n+1)\pi) - \sin(p_n - 2n\pi)\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\{-\sin(2(n+1)\pi - p_{n+1}) + \sin(2n\pi - p_n)\}\\ &= -0 + 0 = 0\end{aligned}$$

が成り立つ．

ここで，$2n\pi - p_n = q_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，

$$0 < q_n < \frac{1}{n\pi} < \frac{\pi}{2} \quad \text{かつ} \quad 0 < q_{n+1} < \frac{1}{(n+1)\pi} < \frac{1}{n\pi}$$

であるから，

$$0 < \cos\frac{1}{n\pi} < \cos q_n < 1 \quad \text{かつ} \quad 0 < \cos\frac{1}{n\pi} < \cos q_{n+1} < 1$$

となり，さらに

$$\begin{aligned}p_{n+1}\cos p_{n+1} - p_n\cos p_n &= \{2(n+1)\pi - q_{n+1}\}\cos(-q_{n+1}) - (2n\pi - q_n)\cos(-q_n)\\ &= \{2(n+1)\pi - q_{n+1}\}\cos q_{n+1} - (2n\pi - q_n)\cos q_n \quad \cdots\cdots ④\end{aligned}$$

となる．これより，

$$\begin{aligned}④ &> \left\{2(n+1)\pi - \frac{1}{n\pi}\right\}\cos\frac{1}{n\pi} - (2n\pi - 0)\cdot 1\\ &= 2\pi\cos\frac{1}{n\pi} - 2n\pi\left(1 - \cos\frac{1}{n\pi}\right) - \frac{1}{n\pi}\cos\frac{1}{n\pi}\\ &= 2\pi\cos\frac{1}{n\pi} - \frac{2}{n\pi}\cdot\frac{1 - \cos\frac{1}{n\pi}}{\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2} - \frac{1}{n\pi}\cos\frac{1}{n\pi}\\ &= \left(2\pi - \frac{1}{n\pi}\right)\cos\frac{1}{n\pi} - \frac{2}{n\pi}\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{n\pi}}{\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2}\cdot\frac{1}{1 + \cos\frac{1}{n\pi}} \longrightarrow 2\pi \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
④ &< \{2(n+1)\pi - 0\} \cdot 1 - \left(2n\pi - \frac{1}{n\pi}\right) \cos \frac{1}{n\pi} \\
&= 2\pi + 2n\pi\left(1 - \cos \frac{1}{n\pi}\right) + \frac{1}{n\pi} \cos \frac{1}{n\pi} \\
&= 2\pi + \frac{2}{n\pi} \cdot \frac{1 - \cos \frac{1}{n\pi}}{\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2} + \frac{1}{n\pi} \cos \frac{1}{n\pi} \\
&= 2\pi + \frac{1}{n\pi} \cos \frac{1}{n\pi} + \frac{2}{n\pi} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{n\pi}}{\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos \frac{1}{n\pi}} \longrightarrow 2\pi \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} (p_{n+1} \cos p_{n+1} - p_n \cos p_n) = 2\pi$$

が得られる．

以上と③より

$$\lim_{n\to\infty} \int_{p_n}^{p_{n+1}} f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi - \frac{1}{4} \cdot 0 + 8 \cdot 0 - 4 \cdot 2\pi = -7\pi$$