〔 I 〕

解答

(1) ア $\frac{12}{25}$　イ 1　ウ $-\frac{1}{25}$　エ $\left(-\frac{1}{25}\right)^k$　オ $\frac{1}{2}$

(2) カ $\sqrt{2}$　キ $\sqrt{2}$　ク $\frac{\sqrt{2}}{4}$　ケ $-\frac{\sqrt{2}}{4}$　コ $2-\sqrt{2}$

解説

(1)

ア　試行を 2 回続けて行ったあと動点 **P** が点 **A** にある条件は,「赤白の順に取り出す」または「白赤の順に取り出す」であるから,

$$a_2 = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{12}{25}$$

イ　試行を $2k+2$ 回続けて行ったあと動点 **P** が点 **A** または **C** にある条件は,「$2k$ 回後に動点 **P** が **A** または **C** にある」であるから ($2k$ 回後に動点 **P** が **A** または **C** にあれば, どのように玉を取り出しても,$2k+2$ 回後には動点 **P** は **A** または **C** にある),

$$a_{2k+2} + c_{2k+2} = a_{2k} + c_{2k}$$

であり, 数列 $\{a_{2k}+c_{2k}\}$ は定数数列となる.

ア と同様に考えると,

$$c_2 = \frac{13}{25}$$

であるから,$k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$a_{2k} + c_{2k} = a_2 + c_2 = 1$$

とわかる.

ウ　試行を $2k+2$ 回続けて行ったあと動点 **P** が点 **A** にある条件は,「$2k$ 回後に動点 **P** が **A** にあって, そこから, 赤白または白赤の順に取り出す」または「$2k$ 回後に動点 **P** が **C** にあって, そこから, 赤赤または白白の順に取り出す」であるから,

$$\begin{aligned} a_{2k+2} &= a_{2k}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\right) + c_{2k}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\right) = \frac{12}{25}a_{2k} + \frac{13}{25}(1-a_{2k}) \quad (a_{2k}+c_{2k}=1 \text{ より}) \\ &= -\frac{1}{25}a_{2k} + \frac{13}{25} \end{aligned}$$

が成り立つ.

エ　ウ で得られた漸化式を変形すると

$$a_{2k+2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{25}\left(a_{2k} - \frac{1}{2}\right)$$

であるから, 数列 $\left\{a_{2k} - \frac{1}{2}\right\}$ は, 初項 $a_2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{50}$, 公比 $-\frac{1}{25}$ の等比数列である. よって,

$$a_{2k} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{50}\left(-\frac{1}{25}\right)^{k-1}$$

すなわち

$$a_{2k} = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{25}\right)^k\right\}$$

が成り立つ.

オ　以上の結果より,

$$c_{2k} = 1 - a_{2k} = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{1}{25}\right)^k\right\}$$

であり,$\left|-\frac{1}{25}\right| < 1$ であるから,

$$\lim_{k\to\infty} c_{2k} = \frac{1}{2}$$

が成り立つ.

(2)

$\boxed{カ}$と$\boxed{キ}$　問題の α についての条件より，

$$\alpha = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$\boxed{ク}$と$\boxed{ケ}$　$w = \dfrac{1}{z}(z \neq 0)$ より

$$z = \frac{1}{w}$$

が成り立つ．

これを $|z-2| = |z-\alpha|$ に代入すると，

$$\left|\frac{1}{w} - 2\right| = \left|\frac{1}{w} - \alpha\right|$$

となり，これを変形すると

$$|1-2w| = |1-\alpha w| \text{ かつ } w \neq 0$$
$$2\left|\frac{1}{2} - w\right| = |\alpha|\left|\frac{1}{\alpha} - w\right| \text{ かつ } w \neq 0$$
$$\left|w - \frac{1}{2}\right| = \left|w - \frac{1}{\alpha}\right| \text{ かつ } w \neq 0 \quad (|\alpha| = 2 \text{ より})$$

となる．

よって，点 w が描く図形は,2 つの点 $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\alpha}$ を結ぶ線分の垂直二等分線から原点を除いたものになる．これより，

$$\beta = \frac{1}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$$

となる．

$\boxed{コ}$　0 でない複素数 z が描く図形は,2 つの点 $2, \alpha$ を結ぶ線分の垂直二等分線から原点を除いたものであり，

$$|\alpha| = |2|$$

であるから，実数 r を用いて

$$z = r\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

と書けて,r のとりうる値の範囲は

$$r \neq 0$$

である．

このもとで

$$\begin{aligned}
z - w = z - \frac{1}{z} &= r\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) - \frac{\cos 0 + i\sin 0}{r\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)} \\
&= r\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) - \frac{1}{r}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right\} = r\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) - \frac{1}{r}\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right) \\
&= \left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\frac{\pi}{8} + \left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\frac{\pi}{8} \cdot i
\end{aligned}$$

となるから，

$$\begin{aligned}
|z-w|^2 &= \left(r - \frac{1}{r}\right)^2\cos^2\frac{\pi}{8} + \left(r + \frac{1}{r}\right)^2\sin^2\frac{\pi}{8} = \left(r^2 + \frac{1}{r^2} - 2\right)\cos^2\frac{\pi}{8} + \left(r^2 + \frac{1}{r^2} + 2\right)\sin^2\frac{\pi}{8} \\
&= \left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right) - 2\left(\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}\right) = r^2 + \frac{1}{r^2} - 2\cos\frac{\pi}{4} \\
&= r^2 + \frac{1}{r^2} - \sqrt{2}
\end{aligned}$$

となる．

ここで,$r^2 > 0, \dfrac{1}{r^2} > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より，

$$|z-w|^2 \geqq 2\sqrt{r^2 \cdot \frac{1}{r^2}} - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$$

が成り立ち, この等号成立条件は

$$r^2 = \frac{1}{r^2} \quad \text{すなわち} \quad r = \pm 1$$

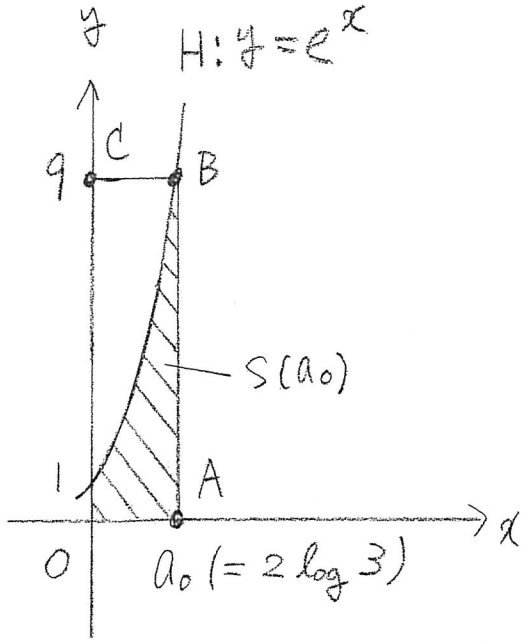
である.

したがって, $|z - w|^2$ の最小値は

$$2 - \sqrt{2}$$

である.

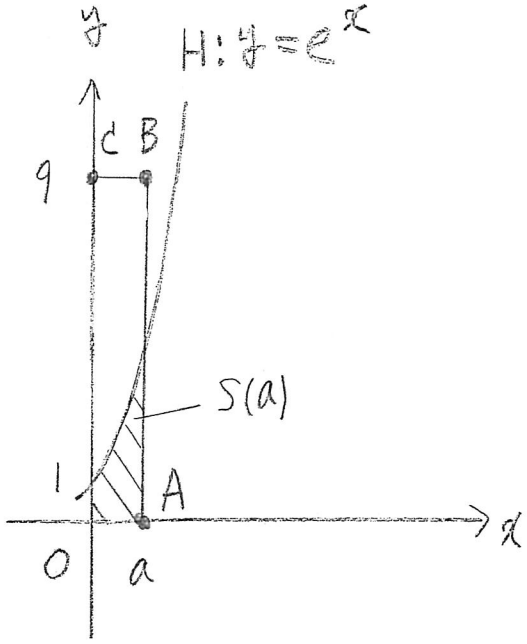
〔Ⅱ〕(1) Bが H 上にあるための条件は $e^a=9$ ∴ $a=2\log 3$ である．よって $a_0=2\log 3$ となる．$e^{a_0}=9$ であることもふまえ，



$$
\begin{aligned}
f(a_0) &= \frac{1}{2}D(a_0)-S(a_0)\\
&= \frac{1}{2}\cdot 9\cdot a_0-\int_0^{a_0}e^x\,dx\\
&= \frac{9}{2}a_0-\left[e^x\right]_0^{a_0}\\
&= \frac{9}{2}a_0-e^{a_0}+1\\
&= \frac{9}{2}\cdot 2\log 3-9+1\\
&= 9\log 3-8
\end{aligned}
$$

である．

(2) $0<a\leqq a_0$ のとき，四角形 OABC と H の位置関係は右図のようになるから，(1)の計算も参考にして，



$$
\begin{aligned}
f(a) &= \frac{1}{2}\cdot 9\cdot a-\int_0^{a}e^x\,dx\\
&= \frac{9}{2}a-e^a+1
\end{aligned}
$$

を得る．これより $f'(a)=\frac{9}{2}-e^a$ である．$f'(a)=0$ を解くと $e^a=\frac{9}{2}$ ∴ $a=\log\frac{9}{2}$ であり，$0<a\leqq a_0\,(=\log 9)$ における $f(a)$ の増減は次表のようになる．

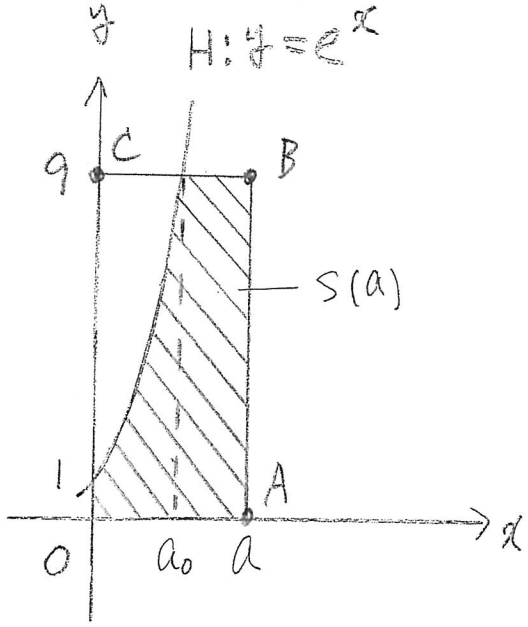
増減表および，$e<3$ であることから得られる不等式

a	(0)	$\cdots$	$\log\frac{9}{2}$	$\cdots$	a_0
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$	(0)	↗	極大	↘	$9\log 3-8$

$$9\log 3-8>9\log e-8$$
$$=9-8$$
$$>0$$

より，この区間における $f(a)$ の符号は正である．

(3) $a>a_0$ のとき，四角形OABCとHの位置関係は右図のようになるから，(1)のときと同様にして



$$S(a)=9a-\int_0^{a_0}(9-e^x)\,dx$$
$$=9a-\left[9x-e^x\right]_0^{a_0}$$
$$=9a-9a_0+e^{a_0}-1$$
$$=9a-9\cdot 2\log 3+9-1$$
$$=9a-18\log 3+8$$

となり，

$$f(a)=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot a-S(a)$$
$$=\frac{9}{2}a-(9a-18\log 3+8)$$
$$=-\frac{9}{2}a+18\log 3-8$$

を得る．このとき $f(a)=0$ を解くと $-\frac{9}{2}a+18\log 3-8=0$

$\therefore a=4\log 3-\frac{16}{9}$ となる…①．

(2) より，$0 < a \leqq a_0$ においては $f(a) = 0$ を満たす a の値は存在しない … ②。

①，② より求める a の値は $a = 4\log 3 - \frac{16}{9}$ である。

〔III〕

■ 解答例 □

(1) 三角関数の合成を用いると，

$$f_k(x) = \frac{1}{n}\{k\sin(kx) + n\cos(kx)\} = \frac{\sqrt{k^2+n^2}}{n}\sin(kx+\theta_k)$$

ただし，$\cos\theta_k = \dfrac{k}{\sqrt{k^2+n^2}}$，$\sin\theta_k = \dfrac{n}{\sqrt{k^2+n^2}}$ である．

これより，$C_k > 0$ に注意すると，$C_k = \dfrac{\sqrt{k^2+n^2}}{n}$

また，$\tan\theta_k = \dfrac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k} = \dfrac{\dfrac{n}{\sqrt{k^2+n^2}}}{\dfrac{k}{\sqrt{k^2+n^2}}} = \dfrac{n}{k}$

(2) 任意の実数 c に対して，

$$\sin\{k\cdot(x+2\pi)+c\} = \sin\{(kx+c)+2k\pi\} = \sin(kx+c)$$

より，$|f_k(x+2\pi)| = |f_k(x)|$ なので，関数 $f_k(x)$ は連続関数で 2π を周期とする周期関数であることから，

$$F_k = \int_0^{2\pi}|f_k(x)|\,dx = \int_0^{2\pi}\left|\frac{\sqrt{k^2+n^2}}{n}\sin(kx+\theta_k)\right|dx$$

$$= \frac{\sqrt{k^2+n^2}}{n}\int_0^{2\pi}|\sin(kx)|\,dx \quad \cdots\cdots(*)$$

となるように実数 c をとれる．

ここで，$kx = t$ とおくと，$x = \dfrac{t}{k}$ より，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{k}$ であることから，$(*)$ は，

$$F_k = \frac{\sqrt{k^2+n^2}}{n}\int_0^{2k\pi}|\sin t|\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt = \frac{\sqrt{k^2+n^2}}{kn}\int_0^{2k\pi}|\sin t|\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{k^2+n^2}}{kn}\left\{\int_0^{\pi}\sin t\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(-\sin t)\,dt + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi}\sin t\,dt + \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}(-\sin t)\,dt\right\} \quad \cdots\cdots(**)$$

ここで，$l = 1,\ 2,\ \cdots,\ k$ において，$\cos\{(2l-2)\pi\} = \cos(2l\pi) = 1$，$\cos\{(2l-1)\pi\} = -1$ に注意すると，

$$\int_{(2l-2)\pi}^{(2l-1)\pi}\sin t\,dt = \Big[-\cos t\Big]_{(2l-2)\pi}^{(2l-1)\pi} = 1+1 = 2$$

$$\int_{(2l-1)\pi}^{2l\pi}(-\sin t)\,dt = \Big[\cos t\Big]_{(2l-1)\pi}^{2l\pi} = 1+1 = 2$$

であることから，$(**)$ は，

$$F_k = \frac{\sqrt{k^2+n^2}}{kn}\cdot(2k+2k) = \frac{4\sqrt{k^2+n^2}}{n}$$

(3) $h(x) = x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ の導関数 $h'(x)$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
h'(x) &= (x)'\sqrt{1+x^2} + x\left(\sqrt{1+x^2}\right)' + \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \sqrt{1+x^2} + x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= \frac{1+x^2+x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= 2\sqrt{1+x^2}
\end{aligned}$$

これより，$h'(x) = \alpha\sqrt{1+x^2}$ となる定数 α は，$\alpha = \underset{\sim}{2}$

(4) (2) と (3) の結果を用いると，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{4\sqrt{k^2+n^2}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}4\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\
&= \int_0^1 4\sqrt{1+x^2}\,dx = 2\int_0^1 2\sqrt{1+x^2}\,dx = 2\int_0^1 h'(x)\,dx \\
&= 2\Big[h(x)\Big]_0^1 = 2\{h(1)-h(0)\} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2\left\{\sqrt{2}+\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}}
\end{aligned}$$

〔Ⅳ〕

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 2,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(t-2,\ t,\ a)$ より,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=(-2)^2+2^2=8,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2=(t-2)^2+t^2+a^2=2t^2-4t+4+a^2$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-2(t-2)+2t=4$$

よって, △ABD の面積 S_1 は

$$S_1=\frac{1}{2}\sqrt{8(2t^2-4t+4+a^2)-4^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4(4t^2-8t+4+2a^2)}=\boldsymbol{\sqrt{4t^2-8t+4+2a^2}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 0,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(t,\ t,\ a)$ より,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=4,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|^2=t^2+t^2+a^2=2t^2+a^2$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2t$$

よって, △OAD の面積 S_2 は

$$S_2=\frac{1}{2}\sqrt{4(2t^2+a^2)-(2t)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4(t^2+a^2)}=\boldsymbol{\sqrt{t^2+a^2}}$$

(2)　$\dfrac{x^2}{x^2+2c}=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x+1+c}$ より,

$$x^2(x^2-2x+1+c)=(x^2-2x+1)(x^2+2c)$$

$$x^2\{(x-1)^2+c\}=(x-1)^2(x^2+2c)$$

$$x^2(x-1)^2+cx^2=x^2(x-1)^2+2c(x-1)^2$$

$$2c(x-1)^2-cx^2=0$$

$$c(x^2-4x+2)=0$$

$c>0$ より, 求める解は,

$$\boldsymbol{x=2\pm\sqrt{2}}$$

(3)　$\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\sqrt{6+2\sqrt{8}}=\sqrt{(4+2)+2\sqrt{4\cdot 2}}=\sqrt{4}+\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$ より,

$$\sqrt{6+4\sqrt{2}}=m+\sqrt{2}\iff 2+\sqrt{2}=m+\sqrt{2}\iff (2-m)+0\cdot\sqrt{2}=0$$

$2-m$ は整数であるから,

$$2-m=0$$

$$\boldsymbol{m=2}$$

(4)　$\triangle\mathrm{OAD} \equiv \triangle\mathrm{OBD}$ であり, $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積は 2 であるから, 四面体 OABD の表面積は

$$2 + S_1 + 2 \times S_2 = 2 + \sqrt{4t^2 - 8t + 4 + 2a^2} + 2\sqrt{t^2 + a^2}$$

ここで, $f(t) = \sqrt{4t^2 - 8t + 4 + 2a^2} + 2\sqrt{t^2 + a^2}$ とおくと,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{2}(4t^2 - 8t + 4 + 2a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (8t - 8) + 2 \cdot \frac{1}{2}(t^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2t \\ &= \frac{4t - 4}{\sqrt{4t^2 - 8t + 4 + 2a^2}} + \frac{2t}{\sqrt{t^2 + a^2}} \\ &= -\frac{4(1 - t)}{\sqrt{4t^2 - 8t + 4 + 2a^2}} + \frac{2t}{\sqrt{t^2 + a^2}} \end{aligned}$$

$f'(t) = 0$ のとき

$$\frac{2(1 - t)}{\sqrt{4t^2 - 8t + 4 + 2a^2}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}}$$

となり, $1 - t \geqq 0,\ t \geqq 0$, つまり $0 \leqq t \leqq 1$ において両辺を 2 乗すると

$$\frac{4(1 - t)^2}{4t^2 - 8t + 4 + 2a^2} = \frac{t^2}{t^2 + a^2}$$

$$\frac{4(t - 1)^2}{4t^2 - 8t + 4 + 16\sqrt{2}} = \frac{t^2}{t^2 + 8\sqrt{2}} \quad (\because\ a^2 = 128^{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{2})$$

$$\frac{t^2}{t^2 + 2 \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 - 2t + 1 + 4\sqrt{2}}$$

(2) の結果より, この方程式を満たす t は $2 \pm \sqrt{2}$ であるが, $0 \leqq t \leqq 1$ を満たすのは $2 - \sqrt{2}$ である.

よって, 関数 $f'(t)$ は連続であり

$$t < 0 \text{ で } f'(t) < 0,\ \ t > 1 \text{ で } f'(t) > 0$$

であるから, $y = f'(t)$ のグラフは t 軸と $t = 2 - \sqrt{2}$ だけで交わるので, $f(t)$ の増減表は下のようになる.

t	$\cdots$	$2 - \sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$		$\nearrow$

$f(t)$ は $t = 2 - \sqrt{2}$ で最小となることがわかるので, 最小値を求めると

$$\begin{aligned} f(2 - \sqrt{2}) &= \sqrt{4(2 - \sqrt{2} - 1)^2 + 16\sqrt{2}} + 2\sqrt{(2 - \sqrt{2})^2 + 8\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{12 + 8\sqrt{2}} + 2\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} \\ &= 2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + 2(2 + \sqrt{2}) \quad (\because\ (3)) \\ &= 2\sqrt{\frac{6 + 4\sqrt{2}}{2}} + 4 + 2\sqrt{2} \\ &= 2 \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 4 + 2\sqrt{2} \quad (\because\ (3)) \\ &= 2\sqrt{2} + 2 + 4 + 2\sqrt{2} \\ &= 6 + 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

したがって, 求める四面体 OABD の表面積の最小値とそのときの t の値は,

$$2 + f(2 - \sqrt{2}) = \underline{\boldsymbol{8 + 4\sqrt{2}\ \ (t = 2 - \sqrt{2})}}$$