〔I〕(1) ア $\frac{1}{3}$　イ $\frac{1}{3}$　ウ n　エ $3^{n-1}-2^n+2$　オ $\frac{125}{729}$

(2) カ -1　キ $-t-2$　ク $2t^2+2t+24$　ケ 2　コ -5

■ 解説 □

(1) n人で1回だけじゃんけんをして勝者がk人となる確率を$p_{n,k}$とする（$1 \leqq k \leqq n-1$, $n \geqq 2$）．n人の手の出し方は全部で3^n通りだけあり，勝者k人の選び方が${}_nC_k$通りだけあり，そのk人がどの手で勝つのかが3通りだけあるから，

$$p_{n,k} = \frac{{}_nC_k \cdot 3}{3^n}$$
$$= \frac{{}_nC_k}{3^{n-1}}$$

である．

n人で1回だけじゃんけんをしてあいこになる確率をq_nとする（$n \geqq 2$）．勝者が1人以上$n-1$人以下となるという事象の余事象の起こる確率がq_nであるから，

$$q_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_{n,k}$$
$$= 1 - \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k$$
$$= 1 - \frac{1}{3^{n-1}} \left(\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k - {}_nC_0 - {}_nC_n \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{3^{n-1}}\{(1+1)^n - 1 - 1\} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 2}{3^{n-1}}$$

となる.

よって

$$a_3 = p_{3,1}$$
$$= \frac{1}{3}$$

である. c_3は3人でじゃんけんを始めたときに, 1回目は勝者が2人でかつ2回目は勝者が1人となるか, あるいは1回目はあいこでかつ2回目は勝者が1人となる確率であるから,

$$c_3 = p_{3,2} \times p_{2,1} + q_3 \times p_{3,1}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

である.

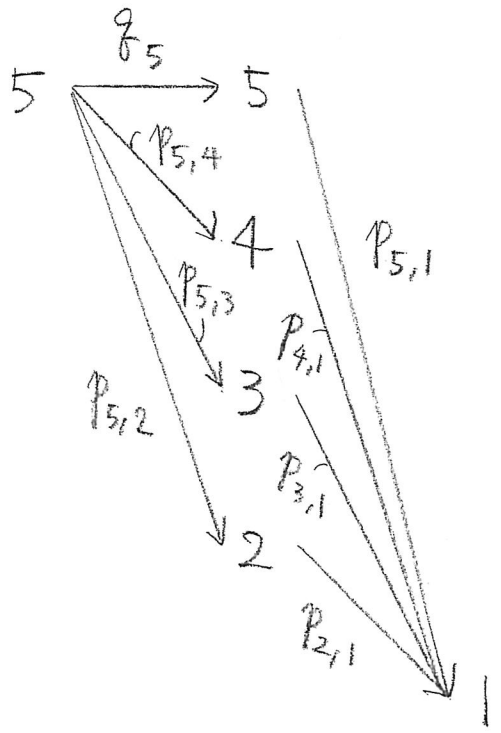
上で求めた$p_{n,k}$, q_nは, 当然$n \geqq 3$においても成り立つのだから,

$$a_n = p_{n,1}$$
$$= \frac{n}{3^{n-1}} \quad (n \geqq 3)$$

$$b_n = q_n$$
$$= \frac{3^{n-1} - 2^n + 2}{3^{n-1}} \quad (n \geqq 3)$$

である.

5人でじゃんけんを始めたときに，2回目のじゃんけんが行われ，かつその勝者が1人となるような，じゃんけんの対戦人数の変化を樹形図に表すと，次図のようになる．



各々の遷移確率も図に記した．よって，

$$C_5 = q_5 \times p_{5,1} + p_{5,4} \times p_{4,1} + p_{5,3} \times p_{3,1} + p_{5,2} \times p_{2,1}$$

$$= \frac{51}{3^4} \cdot \frac{5}{3^4} + \frac{5}{3^4} \cdot \frac{4}{3^3} + \frac{10}{3^4} \cdot \frac{3}{3^2} + \frac{10}{3^4} \cdot \frac{2}{3^1}$$

$$= \frac{1}{3^8}\left(51 \cdot 5 + 5 \cdot 4 \cdot 3^1 + 10 \cdot 3 \cdot 3^2 + 10 \cdot 2 \cdot 3^3\right) = \frac{125}{729}$$

となる．

(2) 与えられた2次方程式を解くと

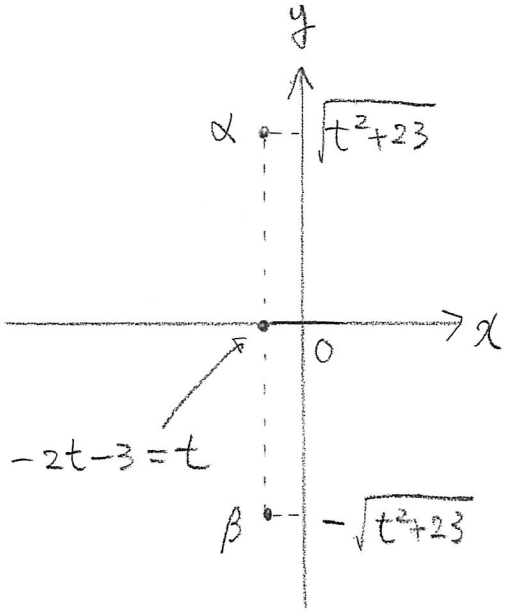
$$z = -2t - 3 \pm \sqrt{(2t+3)^2 - (5t^2 + 12t + 32)}$$

$$= -2t-3 \pm \sqrt{-t^2-23} = -2t-3 \pm \sqrt{t^2+23}\,i$$

となる．$\mathrm{Im}(\alpha) > \mathrm{Im}(\beta)$ より

$\alpha = -2t-3+\sqrt{t^2+23}\,i$，

$\beta = -2t-3-\sqrt{t^2+23}\,i$ である．



$\mathrm{Re}(\alpha) = \mathrm{Re}(\beta)$ なのだから，3点 α, β, t が同一直線上にあるとき，$-2t-3=t$　$\therefore t=-1$ となる．

また，

$$w = \frac{\alpha+\beta+t}{3}$$

$$= \frac{2(-2t-3)+t}{3} = -t-2$$

であり，

$$|\alpha-w|^2 = |(-t-2)-(-2t-3)-\sqrt{t^2+23}\,i|^2$$

$$= |(t+1)-\sqrt{t^2+23}\,i|^2$$

$$= (t+1)^2+t^2+23 = 2t^2+2t+24 \cdots ①$$

である．同様に $|\beta-w|^2$ も①に一致する…②．

重心 w が $\triangle ABC$ の外心にも一致するための条件は，点 w が3点 α, β, t から等距離にあること，すなわち

$$|\alpha-w|^2 = |\beta-w|^2 = |t-w|^2 \cdots ③$$

である．

$$|t-w|^2 = |(-t-2)-t|^2$$

$$= (-2t-2)^2 = 4t^2+8t+4$$

であることと①および②より，

$$③ \iff 2t^2+2t+24 = 4t^2+8t+4$$

$$\iff t^2+3t-10=0$$

$$\iff (t-2)(t+5)=0$$

であり，これより求める t の値は大きい順に 2，-5 となる．

(注) 複素数 z の実部，虚部をそれぞれ $\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$ と表してある．

〔 II 〕　$a_1=\alpha,\ b_1=\beta\ (\alpha>\beta>0)$

$a_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n},\ b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1)　$0<u<\dfrac{\pi}{4}$ を満たすので $0<2u<\dfrac{\pi}{2}$

$\alpha=\tan(2u),\ \beta=\sin(2u)$ のとき

$$a_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{2\tan(2u)\sin(2u)}{\tan(2u)+\sin(2u)}=\frac{2\dfrac{\sin(2u)}{\cos(2u)}\sin(2u)}{\dfrac{\sin(2u)}{\cos(2u)}+\sin(2u)}$$

$$=\frac{2\sin(2u)}{1+\cos(2u)}=\frac{4\sin u\cos u}{2\cos^2 u}=2\cdot\frac{\sin u}{\cos u}=2\tan u$$

ゆえに　$\dfrac{a_2}{\tan u}=2$

$$b_2=\sqrt{a_2b_1}=\sqrt{2\tan u\sin(2u)}=\sqrt{2\frac{\sin u}{\cos u}2\sin u\cos u}=\sqrt{4\sin^2 u}$$

$$=2\sin u$$

ゆえに　$\dfrac{b_2}{\sin u}=2$

よって，$\dfrac{a_2}{\tan u}=A,\ \dfrac{b_2}{\sin u}=B$ となる定数は　$\boldsymbol{A=2,\ B=2}$

(2)　$p>0,\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}$

$\alpha=p\tan x,\ \beta=p\sin x$ のとき，(1) と同様の変形を考えて

$$a_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{2p^2\tan x\sin x}{p(\tan x+\sin x)}=p\cdot\frac{2\tan x\sin x}{\tan x+\sin x}=2p\tan\frac{x}{2}$$

$$b_2=\sqrt{a_2b_1}=\sqrt{2p\tan\frac{x}{2}\cdot p\sin x}=p\sqrt{2\tan\frac{x}{2}\sin x}=2p\sin\frac{x}{2}$$

$$a_3=\frac{2a_2b_2}{a_2+b_2}=\frac{8p^2\tan\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{2p\left(\tan\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}=2p\cdot\frac{2\tan\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}$$

$$=2^2p\tan\left(\frac{x}{2^2}\right)$$

$$b_3=\sqrt{a_3b_2}=\sqrt{2^2p\tan\frac{x}{2^2}\cdot 2p\sin\frac{x}{2}}=2p\sqrt{2\tan\frac{x}{2^2}\sin\frac{x}{2}}$$

$$=2^2p\sin\left(\frac{x}{2^2}\right)$$

これより，自然数 n に対して

$$a_n=2^{n-1}p\tan\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right),\ b_n=2^{n-1}p\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\ \cdots\cdots Ⓐ$$

が成り立つことが推測できる．

これが正しいことを数学的帰納法で示す．

（I）$a_1=p\tan x,\ b_1=p\sin x$ より $n=1$ のとき Ⓐ は成り立つ．

（Ⅱ）$n=k$（$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）のとき Ⓐ が成り立つと仮定すると

$$a_k=2^{k-1}p\tan\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right),\ \ b_k=2^{k-1}p\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)$$

が成り立つ．このとき

$$a_{k+1}=\frac{2a_kb_k}{a_k+b_k}=\frac{2\cdot 2^{2(k-1)}p^2\tan\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2^{k-1}p\left\{\tan\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)+\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right\}}$$

$$=2^{k-1}\cdot p\cdot\frac{2\tan\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)+\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}$$

$$=2^kp\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

$$b_{k+1}=\sqrt{a_{k+1}b_k}=\sqrt{2^kp\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)\cdot 2^{k-1}p\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}$$

$$=2^{k-1}p\sqrt{2\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}$$

$$=2^kp\sin\frac{x}{2^k}$$

すなわち，$n=k+1$ のときも Ⓐ は成り立つ．

ゆえに Ⓐ はすべての自然数に対して成り立つので

$$\boldsymbol{\frac{a_n}{\tan\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}=2^{n-1}p,\ \ \frac{b_n}{\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}=2^{n-1}p}$$

(3)　$\alpha=2,\ \beta=1$ のとき，$0<x<\frac{\pi}{2}$ において

$$\begin{cases} p\tan x=2 & \cdots\cdots① \\ p\sin x=1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

① から　$\dfrac{p\sin x}{\cos x}=2$

② を代入して　$\dfrac{1}{\cos x}=2$　すなわち　$\cos x=\dfrac{1}{2}$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$x=\dfrac{\pi}{3}$

② から　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}p=1$　すなわち　$p=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2^{n-1}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}\right)}{\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}\right)}\right\}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left\{2^{n-1}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}\right)}{\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 1$$

$$= \boldsymbol{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$$

〔 Ⅲ 〕　a を定数

$$C : y = \frac{\sqrt{3}}{6}(x-1)^2$$

$$D_a : \frac{(x-1)^2}{3} + (y-a)^2 = 1$$

(1)　D_a の式の両辺を x で微分すると

$$\frac{2(x-1)}{3} + 2(y-a)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{3(y-a)} \quad (y \neq a)$$

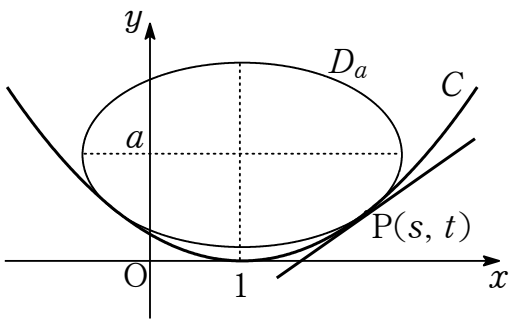
よって，曲線 D_a 上の点 $\left(1-\sqrt{2},\ a-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ における曲線 D_a の接線の傾きは

$$-\frac{1-\sqrt{2}-1}{3\left(a-\frac{\sqrt{3}}{3}-a\right)} = \boldsymbol{-\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

(2)　C の式を x で微分すると　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

2 つの曲線 C，D_a が共有点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ $(s > 1)$ をもち，この共有点 P において共通の接線をもつ条件は，2 つの曲線 C，D_a がともに点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ を通り，点 P における 2 つの曲線の接線の傾きが等しいことであるから

$$\begin{cases} t = \dfrac{\sqrt{3}}{6}(s-1)^2 & \cdots\cdots① \\ \dfrac{(s-1)^2}{3} + (t-a)^2 = 1 & \cdots\cdots② \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}(s-1) = -\dfrac{s-1}{3(t-a)} & \cdots\cdots③ \end{cases}$$



③ より $s-1 \neq 0$ であるから

$$t - a = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots③'$$

③′ を ② に代入して　$(s-1)^2 = 2$

$s-1 > 0$ であるから　$s-1 = \sqrt{2}$

ゆえに　$s = 1+\sqrt{2}$

① から　$t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

③′ から　$a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

よって　$\boldsymbol{a = \frac{2}{\sqrt{3}},\ s = 1+\sqrt{2},\ t = \frac{1}{\sqrt{3}}}$

(3)　(2) で求めた a の値を k とするので　$k = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

このとき，D_k の $y \leqq k$ の部分を曲線 E_k とするが，2 つの曲線 C と E_k はいずれも直線 $x = 1$ に関して対称であり，x 座標が $1-\sqrt{2}$，$1+\sqrt{2}$ の点で接する．

2 つの曲線 C と E_k で囲まれた部分を，直線 $y=k$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V は，2 つの曲線 C と E_k をそれぞれ x 軸方向に -1，y 軸方向に $-k$ だけ平行移動した曲線

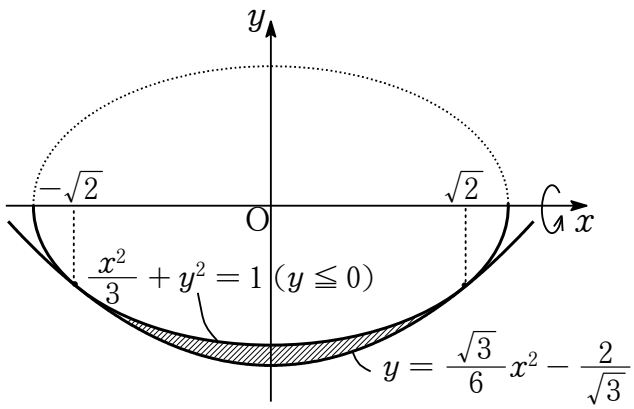
$$\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x^2-k \\ \dfrac{x^2}{3}+y^2=1\ (y\leqq 0) \end{cases}$$

で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積に等しい．

$-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$ において

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x^2-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(1-\frac{x^2}{3}\right)=\frac{1}{12}(x^4-4x^2+4)=\frac{1}{12}(x^2-2)^2\geqq 0$$

$$\therefore\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x^2-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\geqq 1-\frac{x^2}{3}$$



よって

$$\begin{aligned} V&=2\left\{\int_0^{\sqrt{2}}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x^2-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2dx-\int_0^{\sqrt{2}}\pi\left(1-\frac{x^2}{3}\right)dx\right\} \\ &=2\pi\cdot\frac{1}{12}\int_0^{\sqrt{2}}(x^4-4x^2+4)\,dx \\ &=\frac{\pi}{6}\left[\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3+4x\right]_0^{\sqrt{2}} \\ &=\boldsymbol{\frac{16\sqrt{2}}{45}\pi} \end{aligned}$$

〔Ⅳ〕

解答

(1)　$f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}, g(x)=\tan x+\dfrac{3}{2x}$ より，

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}(\cos x)'-\cos x(\sqrt{x})'}{x}=\dfrac{-\sqrt{x}\sin x-\cos x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\dfrac{2x\sin x+\cos x}{2x\sqrt{x}} \\ g'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{3}{2x^2} \end{cases}$$

(2)　接線 ℓ_p の方程式は $y-f(p)=f'(p)(x-p)$ であり，接線 ℓ_p が原点 $(0,0)$ を通る条件は

$$\begin{aligned} 0-f(p)&=f'(p)(0-p) \\ -\frac{\cos p}{\sqrt{p}}&=-\frac{2p\sin p+\cos p}{2p\sqrt{p}}(-p) \\ 3\cos p&=-2p\sin p \end{aligned}$$

となり，この等式は $p=\dfrac{\pi}{2}\times$ (奇数) で不成立であるから，$\cos p\neq 0$ である．よって，

$$3=-2p\frac{\sin p}{\cos p}\quad \text{すなわち}\quad \tan p=-\frac{3}{2p}$$

が成り立つ．

以上の結果より，

$$g(p)=\tan p+\frac{3}{2p}=\underset{\sim}{0}$$

(3)　条件 (i) を言い換えると，$n\pi-\dfrac{\pi}{2}<p_n<n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ である．よって，「接線 ℓ_{p_n} が原点 $(0,0)$ を通る」，すなわち，

$$g(p_n)=\tan p_n+\frac{3}{2p_n}=0$$

を満たす実数 $p_n\left(n\pi-\dfrac{\pi}{2}<p_n<n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ について考える．

$n\pi\leqq x<n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ では $g(x)=\underbrace{\tan x}_{0\text{ 以上}}+\underbrace{\dfrac{3}{2x}}_{\text{正}}>0$ となる．

次に，$n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<n\pi$ において，

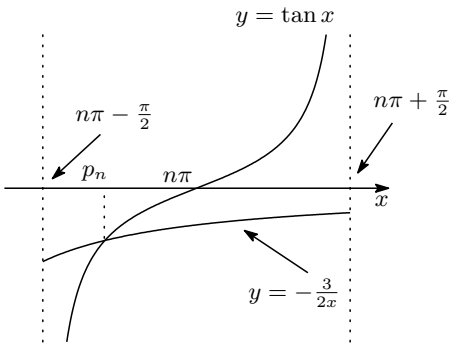
$$g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{3}{2x^2}>\frac{1}{1}-\frac{3}{2\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)^2}\geqq 1-\frac{3}{2\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)^2}=1-\frac{3}{\frac{\pi^2}{2}}>1-\frac{3}{\frac{3^2}{2}}=\frac{1}{3}>0$$

であるから，$g(x)$ は連続な単調増加関数であり，

$$\begin{cases} g(n\pi)=\dfrac{3}{2n\pi}>0 \\ \displaystyle\lim_{x\to\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)+0} g(x)=-\infty \end{cases}$$

であるから，$g(x)=0$ を満たす x が $n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<n\pi$ の範囲にただ 1 つ存在する．

以上より，そのただ 1 つの x を p_n としてやれば，問題の条件 (i),(ii) を同時に満たす実数 p_n がただ 1 つ存在する．よって，示された．



(4)　**(3)** の p_n は, 上図のように,2 つの曲線 $y=\tan x, y=-\dfrac{3}{2x}\left(n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ のただ 1 つの共有点の x 座標である.
(3) より,p_n は $p_n<n\pi$ を満たす.

次に,$n\pi-\dfrac{\pi}{2}<n\pi-\dfrac{1}{n}<n\pi$, かつ,$n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ において $\tan x$ は単調増加関数であり,

$$\begin{aligned}
\tan p_n-\tan\left(n\pi-\frac{1}{n}\right)&=\tan p_n-\tan\left(-\frac{1}{n}\right)\quad(\tan x\text{ の周期は}\pi\text{より})\\
&=-\frac{3}{2p_n}+\tan\frac{1}{n}\\
&\geqq-\frac{3}{2p_n}+\frac{1}{n}\quad\left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\text{のときに}\tan x\geqq x\text{ が成り立つから}\right)\\
&=\frac{2p_n-3n}{2np_n}\\
&>\frac{2\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)-3n}{2np_n}=\frac{(2\pi-3)n-\pi}{2np_n}\\
&\geqq\frac{(2\pi-3)\cdot1-\pi}{2np_n}\\
&=\frac{\pi-3}{2np_n}\\
&>0
\end{aligned}$$

であるから,$n\pi-\dfrac{1}{n}<p_n$ が成り立つ.

以上より, 問題の不等式が成り立つことが示された.

(5)

$$m^{\frac{3}{2}}\alpha_m=m^{\frac{3}{2}}f'(p_{2m})=-m^{\frac{3}{2}}\times\frac{2p_{2m}\sin p_{2m}+\cos p_{2m}}{2(p_{2m})^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2p_{2m}\sin p_{2m}+\cos p_{2m}}{2\left(\frac{p_{2m}}{m}\right)^{\frac{3}{2}}}\quad\cdots[\mathbf{1}]$$

が成り立つ.

ここで,$2m\pi-\dfrac{1}{2m}<p_{2m}<2m\pi$ より,$2\pi-\dfrac{1}{2m^2}<\dfrac{p_{2m}}{m}<2\pi$ が成り立ち,

$$\lim_{m\to\infty}\left(2\pi-\frac{1}{2m^2}\right)=2\pi$$

だから,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{p_{2m}}{m}=2\pi\quad\cdots[\mathbf{2}]$$

とわかる.

次に,$2m\pi-\dfrac{\pi}{2}<2m\pi-\dfrac{1}{2m}<p_{2m}<2m\pi$ より,

$$\cos\left(-\frac{1}{2m}\right)=\cos\left(2m\pi-\frac{1}{2m}\right)<\cos p_{2m}<\cos 2m\pi=1$$

であり,

$$\lim_{m\to\infty}\cos\left(-\frac{1}{2m}\right)=\cos 0=1$$

であるから,

$$\lim_{m\to\infty}\cos p_{2m}=1\quad\cdots[\mathbf{3}]$$

とわかる.

最後に,$\tan p_{2m}=-\dfrac{3}{2p_{2m}}$ であることに注意すると,

$$p_{2m}\sin p_{2m}=p_{2m}\tan p_{2m}\cos p_{2m}=p_{2m}\left(-\frac{3}{2p_{2m}}\right)\cos p_{2m}=-\frac{3}{2}\cos p_{2m}$$

であるから,

$$\lim_{m\to\infty}p_{2m}\sin p_{2m}=\lim_{m\to\infty}\left(-\frac{3}{2}\cos p_{2m}\right)=-\frac{3}{2}\cdot1=-\frac{3}{2}\quad\cdots[\mathbf{4}]$$

が成り立つ.

以上,[**1**],[**2**],[**3**],[**4**] より

$$\lim_{m\to\infty} m^{\frac{3}{2}}\alpha_m = -\frac{2\left(-\frac{3}{2}\right)+1}{2\cdot(2\pi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}$$

が成り立つ.