

# I

- 〔1〕 ア  $\frac{r+2}{r}x$       イ  $\frac{r+2}{2}y$       ウ  $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{4}$
- 〔2〕 エ  $r^2s^2 + 4$       オ  $r^2t^2 - 4r^2$       カ  $t^2 - r^2s^2$
- 〔3〕 キ  $ux - up + q$       ク  $-\frac{1}{u}x + \frac{p}{u} + q$       ケ  $r^2 - p^2$
- コ  $4 - q^2$       サ  $r^2 + 4$

## ■解説□

〔1〕 点 P は線分 AB を  $2:r$  に内分する点であるから、

$$x = \frac{r \cdot a + 2 \cdot 0}{2+r} = \frac{ra}{2+r}, \quad y = \frac{r \cdot 0 + 2 \cdot b}{2+r} = \frac{2b}{2+r}$$

よって、

$$a = \underbrace{\frac{r+2}{r}x}_{ア}, \quad b = \underbrace{\frac{r+2}{2}y}_{イ}$$

AB = r + 2 より、 $AB^2 = (r+2)^2$  であるから、

$$a^2 + b^2 = (r+2)^2$$

$$\left(\frac{r+2}{r}x\right)^2 + \left(\frac{r+2}{2}y\right)^2 = (r+2)^2$$

$r+2 \neq 0$  であるから、

$$\underbrace{\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{4}}_{ウ} = 1$$

〔2〕  $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{4} = 1$  と  $y = sx + t$  を連立すると、

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{(sx+t)^2}{4} = 1$$

$$4x^2 + r^2(s^2x^2 + 2stx + t^2) = 4r^2$$

$$\underbrace{(r^2s^2 + 4)}_{エ}x^2 + 2r^2stx + \underbrace{(r^2t^2 - 4r^2)}_{オ} = 0 \quad \dots\dots①$$

よって、曲線 C が楕円であることより、

直線  $l_1$  が曲線 C の接線となる  $\iff$   $x$  の 2 次方程式①がただ 1 つの実数解をもつ

であるから、①の判別式を  $D$  とすると、

$$\frac{D}{4} = 0$$

$$(r^2st)^2 - (r^2s^2 + 4)(r^2t^2 - 4r^2) = 0$$

$$r^4 s^2 t^2 - r^4 s^2 t^2 + 4r^4 s^2 - 4r^2 t^2 + 16r^2 = 0$$

$r \neq 0$  より,

$$r^2 s^2 - t^2 + 4 = 0$$

$$\underbrace{t^2 - r^2 s^2}_カ = 4 \quad \dots\dots ②$$

[3] 直線  $l_2$  は, 点  $Q(p, q)$  を通り, 傾き  $u (\neq 0)$  の直線であるから,

$$y - q = u(x - p) \quad \text{すなわち} \quad y = \underbrace{ux - up + q}_キ$$

また, 直線  $l_3$  は, 点  $Q(p, q)$  を通り, 傾き  $-\frac{1}{u}$  の直線であるから,

$$y - q = -\frac{1}{u}(x - p) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{u}x + \frac{p}{u} + q$$

よって, 直線  $l_2$  が曲線  $C$  の接線となるための必要十分条件は, ②において  $s = u, t = -up + q$  とすると,

$$\begin{aligned} (-up + q)^2 - r^2 u^2 &= 4 \\ \underbrace{(r^2 - p^2)}ケ u^2 + 2pqu + \underbrace{(4 - q^2)}コ &= 0 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

また, 直線  $l_3$  が曲線  $C$  の接線となるための必要十分条件は, ②において  $s = -\frac{1}{u}, t = \frac{p}{u} + q$  とすると,

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{u} + q\right)^2 - r^2 \cdot \left(-\frac{1}{u}\right)^2 &= 4 \\ (4 - q^2)u^2 - 2pqu + (r^2 - p^2) &= 0 \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

したがって,

直線  $l_2$  と直線  $l_3$  の両方が曲線  $C$  の接線である

$$\iff u \text{ の 2 次方程式③と④が } 0 \text{ 以外の共通な実数解をもつ } (\dots\dots(*))$$

③ + ④より,

$$(r^2 - p^2 + 4 - q^2)u^2 + (r^2 - p^2 + 4 - q^2) = 0$$

$$(r^2 - p^2 + 4 - q^2)(u^2 + 1) = 0$$

ゆえに, (\*) が成り立つとき,

$$r^2 - p^2 + 4 - q^2 = 0$$

$$p^2 + q^2 = r^2 + 4$$

であるから, 点  $Q$  の軌跡を表す方程式は,

$$p^2 + q^2 = \underbrace{r^2 + 4}_サ$$

## II

- (1)    ア 1                      イ  $b'$                       ウ  $a'$
- エ  $mb' + lx_0$             オ  $-ma' + ly_0$
- (2)    カ  $-a^2 + 4bl$             キ  $\sqrt{a^2 - 4bl + 4b^2c}$     ク  $\frac{-2blx_0 + a}{2b^2}$
- ケ 6                              コ 14

### ■ 解説 □

[1] 自然数  $a'$ ,  $b'$  を用いて  $a = a'd$ ,  $b = b'd$  と表すと,  $a$  と  $b$  の最大公約数は  $d$  なので,  $a'$  と  $b'$  は互いに素, すなわち最大公約数は  $\underset{\sim}{ア}$  である.

このとき, 式 (4) より,

$$a'(x - lx_0) = -b'(y - ly_0)$$

であることから,  $x - lx_0$  は  $\underset{\sim}{イ}$  の倍数となり,  $y - ly_0$  は  $\underset{\sim}{ウ}$  の倍数となる.

また, 式 (5) より,

$$\frac{x - lx_0}{b'} = m \quad \text{これを解いて, } x = \underbrace{mb' + lx_0}_{\sim \text{エ}}$$

$$\frac{-(y - ly_0)}{a'} = m \quad \text{これを解いて, } y = \underbrace{-ma' + ly_0}_{\sim \text{オ}}$$

と表される.

[2]  $d = 1$  のときを考える. このとき,  $a' = a$ ,  $b' = b$  である.

$y = -x^2 + c$  と  $ax + by = l$  から  $y$  を消去すると,

$$ax + b(-x^2 + c) = l$$

整理すると,  $bx^2 - ax + l - bc = 0 \dots\dots \textcircled{1}$

放物線  $y = -x^2 + c$  と直線  $ax + by = l$  が異なる 2 つの共有点をもつ条件は, 2 次方程式  $\textcircled{1}$  が異なる 2 つの実数解をもつことであり, 判別式  $D$  について考えると,

$$D = (-a)^2 - 4 \cdot b \cdot (l - bc) > 0$$

これを  $c$  について解くと,  $c > \frac{\underbrace{-a^2 + 4bl}_{\sim \text{カ}}}{4b^2}$

このとき, 共有点の  $x$  座標は 2 次方程式  $\textcircled{1}$  について, 解の公式より,

$$x = \frac{-(-a) \pm \sqrt{(-a)^2 - 4 \cdot b \cdot (l - bc)}}{2b} = \frac{a \pm \underbrace{\sqrt{a^2 - 4bl + 4b^2c}}_{\sim \text{キ}}}{2b}$$

$\text{エ}$  の  $x = mb' + lx_0$  が  $\frac{a - \text{キ}}{2b} < x < \frac{a + \text{キ}}{2b}$  を満たす条件は,  $b' = b$  に注意すると,

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - 4bl + 4b^2c}}{2b} < mb + lx_0 < \frac{a + \sqrt{a^2 - 4bl + 4b^2c}}{2b}$$

$$\frac{-2blx_0 + a - \sqrt{a^2 - 4bl + 4b^2c}}{2b} < mb < \frac{-2blx_0 + a + \sqrt{a^2 - 4bl + 4b^2c}}{2b}$$

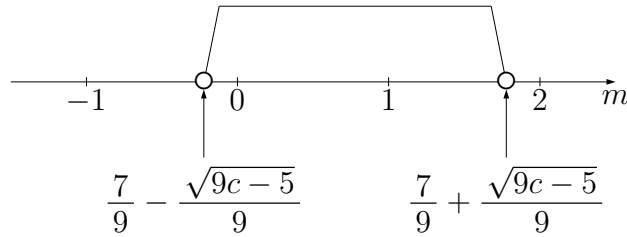
$$\underbrace{\frac{-2blx_0 + a}{2b^2}}_{\sim \text{ク}} - \frac{\sqrt{a^2 - 4bl + 4b^2c}}{2b^2} < m < \underbrace{\frac{-2blx_0 + a}{2b^2}}_{\sim \text{ク}} + \frac{\sqrt{a^2 - 4bl + 4b^2c}}{2b^2} \dots\dots \textcircled{2}$$

特に、 $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $\ell = 2$  のとき、式 (3) より、1 次不定方程式  $2x + 3y = 1$  の整数解の 1 つが  $(x_0, y_0) = (-1, 1)$  であることから、

$$\frac{12+2}{18} - \frac{\sqrt{36c-20}}{18} < m < \frac{12+2}{18} + \frac{\sqrt{36c-20}}{18}$$

$$\frac{7}{9} - \frac{\sqrt{9c-5}}{9} < m < \frac{7}{9} + \frac{\sqrt{9c-5}}{9}$$

これを満たす整数  $m$  の値がちょうど 2 個存在するための条件は、下の数直線より、



$$\begin{cases} -1 \leq \frac{7}{9} - \frac{\sqrt{9c-5}}{9} < 0 \\ 1 < \frac{7}{9} + \frac{\sqrt{9c-5}}{9} \leq 2 \end{cases}$$

これをまとめると、

$$\frac{7}{9} < \frac{\sqrt{9c-5}}{9} \leq \frac{11}{9}$$

$$7 < \sqrt{9c-5} \leq 11$$

以上より、 $6 < c \leq 14$

【参考】

1 次不定方程式  $2x + 3y = 1$  のすべての整数解は、 $k$  を整数とすると、

$$\begin{cases} x = 3k - 1 \\ y = -2k + 1 \end{cases}$$

と表される。これを用いて、 $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $\ell = 2$ ,  $x_0 = 3k - 1$  を ② に代入すると、

$$-2k + \frac{7}{9} - \frac{\sqrt{9c-5}}{9} < m < -2k + \frac{7}{9} + \frac{\sqrt{9c-5}}{9}$$

$-2k$  は整数なので、 $k$  の値に関わらず、

$$\frac{7}{9} - \frac{\sqrt{9c-5}}{9} < m < \frac{7}{9} + \frac{\sqrt{9c-5}}{9}$$

の部分だけを調べればよい。

〔Ⅲ〕 ア  $\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$  イ 1 ウ  $\frac{1-t^2}{1+t^2}$  エ  $\sqrt{2}-1$  オ  $\sqrt{2}$   
カ  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  キ  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ク  $2\alpha - \frac{\pi}{2}$  ケ  $\frac{3}{2}\pi - 2\alpha$  コ  $I + J$   
サ  $\pi$

〔解説〕

〔1〕  $f(t) = \frac{2t}{1+t^2} \quad (0 \leq t \leq 1)$

$$f'(t) = \frac{2(1-t^2)}{\underbrace{(1+t^2)^2}_{\text{ア}}}$$

$f'(t) \geq 0$  より  $f(t)$  は単調増加であり  $f(0) = 0, f(1) = 1$  なので  $0 \leq f(t) \leq 1$  イ

$$\sqrt{1 - \{f(t)\}^2} = \sqrt{1 - \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = \left|\frac{1-t^2}{1+t^2}\right| = \frac{1-t^2}{\underbrace{1+t^2}_{\text{ウ}}}$$

〔2〕  $\tan \alpha = \sqrt{2} + 1 \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$  を満たしているとき

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\text{エ}}$$

〔3〕  $\sin \theta = f(t)$  とおくと

$$\begin{array}{l|l} \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 \rightarrow 1 \end{array}$$

$0 < t < 1$  において、両辺  $t$  で微分して

$$\cos \theta \frac{d\theta}{dt} = f'(t)$$

$\sqrt{1 - \{f(t)\}^2} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{\cos^2 \theta} = |\cos \theta| = \cos \theta$  であるから

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{f'(t)}{\sqrt{1 - \{f(t)\}^2}} = \frac{2}{1+t^2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2} + \sin \theta} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2} + f(t)} \cdot \frac{d\theta}{dt} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2} + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\underbrace{\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}_{\text{オ, カ, キ}}} dt$$

$t + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan u$  とおくと

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tan^2 u + 1)$$

$$\begin{array}{l|l} t & 0 \rightarrow 1 \\ \hline u & \frac{\pi}{4} \rightarrow \alpha \end{array}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2} \tan^2 u + \frac{1}{2}} \cdot \frac{dt}{du} du = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2} (\tan^2 u + 1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\tan^2 u + 1) du$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} 2 du = \left[ 2u \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} = \underbrace{2\alpha - \frac{\pi}{2}}_{\text{ク}}$$

$J$  についても同様に

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \sin\theta} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2} - f(t)} \cdot \frac{d\theta}{dt} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} dt$$

$t - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan v$  とおくと

$$\begin{array}{l|l} t & 0 \rightarrow 1 \\ \hline v & -\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha \end{array}$$

$$J = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2} - \alpha} 2 dv = \left[ 2v \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2} - \alpha} = \underbrace{\frac{3}{2}\pi - 2\alpha}_{\text{ク}}$$

[4]  $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$  は偶関数なので

$$K(r) = \int_{-r}^r \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}} = 2 \int_0^r \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta$  において置換積分法を用いると

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos\theta$$

$r \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - 0$  ならば  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$

$$\sqrt{1-2x^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta| = \cos\theta$$

$$\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{2}{(2-\sin^2\theta)\cos\theta}$$

$$\lim_{r \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - 0} K(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sqrt{2}}{2-\sin^2\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2} + \sin\theta} + \frac{1}{\sqrt{2} - \sin\theta} \right) d\theta$$

$$= \underbrace{I + J}_{\text{ク}}$$

$$= \underbrace{\pi}_{\text{ク}}$$

## IV

[1] ア  $\alpha z + \beta$

[2] イ  $|(\alpha - 1)i + \beta||\alpha|^{n-1}$       ウ  $\frac{|(\alpha - 1)i + \beta|}{1 - |\alpha|}$

[3] エ  $\gamma z + (1 - \gamma)\delta$       オ  $\alpha$       カ  $\frac{\beta}{1 - \alpha}$

[4] キ  $\frac{1}{3} \sin 2\theta$       ク  $\frac{2}{9} \sin \theta(2\sqrt{3} - 3 \cos \theta)$

ケ  $\frac{2}{9} \sin \theta(2\sqrt{3} - 3 \cos \theta) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$       コ  $\frac{1}{4} \sin \theta(2\sqrt{3} - 3 \cos \theta)$

### ■解説□

[2] 問題文より,

$$\begin{cases} z_0 = i \\ z_n = \alpha z_{n-1} + \beta \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

である。

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= |z_{n+1} - z_n| \\ &= |\alpha z_n + \beta - (\alpha z_{n-1} + \beta)| \\ &= |\alpha||z_n - z_{n-1}| \\ &= |\alpha|a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

であるから, 数列  $\{a_n\}$  は, 初項

$$\begin{aligned} a_1 &= |z_1 - z_0| \\ &= |\alpha z_0 + \beta - z_0| \\ &= |(\alpha - 1)i + \beta| \end{aligned}$$

公比  $|\alpha|$  の等比数列である。よって,

$$a_n = \underbrace{|(\alpha - 1)i + \beta|}_{a_1} |\alpha|^{n-1}$$

したがって,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は, 初項  $a_1$ , 公比  $|\alpha|$  の無限等比級数で,  $0 < (\text{公比}) < 1$  であるから,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1 - |\alpha|} = \frac{|(\alpha - 1)i + \beta|}{1 - |\alpha|}$$

[3] 求める点を表す複素数を  $\epsilon$  とすると、問題文より、

$$\epsilon - \delta = \gamma(z - \delta) \quad \text{すなわち} \quad \epsilon = \underbrace{\gamma z + (1 - \gamma)\delta}_{\text{エ}}$$

$\alpha z + \beta = \gamma z + (1 - \gamma)\delta$  が任意の複素数  $z$  で成り立つための条件は、

$$\alpha = \gamma \quad \text{かつ} \quad \beta = (1 - \gamma)\delta$$

であり、これより、

$$\gamma = \underbrace{\alpha}_{\text{オ}}, \quad \delta = \underbrace{\frac{\beta}{1 - \alpha}}_{\text{カ}}$$

[4]  $\frac{\beta}{1 - \alpha} = 1$  が成り立つとき、 $\beta = 1 - \alpha$  である。

$z_0 = i$  であり、

$$\begin{aligned} z_2 &= \alpha z_1 + \beta \\ &= \alpha(\alpha z_0 + \beta) + \beta \\ &= \alpha^2 i + \beta(1 + \alpha) \\ &= \alpha^2 i + (1 - \alpha)(1 + \alpha) \\ &= \alpha^2(i - 1) + 1 \end{aligned}$$

すなわち、

$$z_2 - 1 = \alpha^2(i - 1)$$

であるから、 $\overrightarrow{BP_2}$  は  $\overrightarrow{BP_0}$  を  $2\theta$  回転して大きさを  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$  倍したベクトルである。

これと  $|i - 1| = \sqrt{2}$  に注意して、三角形  $P_0BP_2$  の面積 ( $T$  とする) を求めると、

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sin 2\theta = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{キ}} \sin 2\theta$$

また、

$$z_1 = \alpha i + \beta = \alpha i + (1 - \alpha) = \alpha(i - 1) + 1$$

すなわち

$$z_1 - 1 = \alpha(i - 1)$$

であり、同様に

$$z_2 - 1 = \alpha(z_1 - 1)$$

となるから、 $\overrightarrow{BP_1}$  は  $\overrightarrow{BP_0}$  を  $\theta$  回転して大きさを  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  倍したベクトルであり、 $\overrightarrow{BP_2}$  は  $\overrightarrow{BP_1}$  を  $\theta$  回転

して大きさを  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  倍したベクトルである。よって、



$$\begin{aligned}
(\text{三角形 } P_0P_1P_2 \text{ の面積}) &= (\text{三角形 } P_0BP_1 \text{ の面積}) + (\text{三角形 } P_1BP_2 \text{ の面積}) - T \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sin \theta - \frac{1}{3} \sin 2\theta \\
&= \frac{4}{3\sqrt{3}} \sin \theta - \frac{2}{3} \sin \theta \cos \theta \\
&= \frac{2}{9} \sin \theta (2\sqrt{3} - 3 \cos \theta) \quad (= S_1)
\end{aligned}$$

三角形  $P_nP_{n+1}P_{n+2}$  は、三角形  $P_{n-1}P_nP_{n+1}$  を点 B を中心に  $\theta$  回転し、 $\frac{1}{\sqrt{3}}$  倍に相似拡大したものであるから、

$$S_{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 S_n = \frac{1}{3} S_n$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
S_n &= S_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{2}{9} \sin \theta (2\sqrt{3} - 3 \cos \theta) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} S_{2n-1}$  は、初項  $S_1$ 、公比  $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$  の無限等比級数であり、 $0 < (\text{公比}) < 1$  より、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} S_{2n-1} &= \frac{S_1}{1 - \frac{1}{9}} \\
&= \frac{1}{4} \sin \theta (2\sqrt{3} - 3 \cos \theta)
\end{aligned}$$