Ⅰ

〔1〕 $\boxed{ア}$ $\dfrac{s}{r}$ $\boxed{イ}$ $\beta-\alpha$ $\boxed{ウ}$ $\sqrt[n]{\dfrac{s}{r}}$

$\boxed{エ}$ $\dfrac{2k\pi+\beta-\alpha}{n}$ $\boxed{オ}$ $3\sqrt{3}$

〔2〕 $\boxed{カ}$ 1 $\boxed{キ}$ 0 $\boxed{ク}$ i $\boxed{ケ}$ $-i$

$\boxed{コ}$ $-\dfrac{9}{8}i$ $\boxed{サ}$ $\dfrac{\sqrt{3}-i}{32}$ $\boxed{シ}$ $-i$

■解説□

〔1〕z_0 は $P_1(z)=0$ の解であるから，

$$P_1(z_0)=0$$

であり，これを変形すると，

$$\begin{aligned}&Az_0-B=0\\&z_0=\frac{B}{A}\\&z_0=\underbrace{\frac{s}{r}}_{ア}\{\cos(\underbrace{\beta-\alpha}_{イ})+i\sin(\underbrace{\beta-\alpha}_{イ})\}\end{aligned}$$

$P_n(z)=0$ より，

$$z^n=\frac{B}{A}=\frac{s}{r}\{\cos(\beta-\alpha)+i\sin(\beta-\alpha)\}$$

となり，z の絶対値は $\sqrt[n]{\dfrac{s}{r}}$ である。

また，z の偏角を θ とすると，z^n の偏角は $n\theta$ である。

$0\leqq\theta<2\pi$ より，

$$0\leqq n\theta<2n\pi$$

であるから，

$$n\theta_k=2k\pi+(\beta-\alpha)$$

すなわち，

$$\theta_k=\frac{2k\pi+\beta-\alpha}{n}$$

よって，

$$w_k=\underbrace{\sqrt[n]{\frac{s}{r}}}_{ウ}\left\{\cos\left(\underbrace{\frac{2k\pi+\beta-\alpha}{n}}_{エ}\right)+i\sin\left(\underbrace{\frac{2k\pi+\beta-\alpha}{n}}_{エ}\right)\right\}$$

前問の結果を利用すると，

$$\begin{cases} w_0 = \sqrt[3]{\dfrac{s}{r}}\left(\cos\dfrac{\beta-\alpha}{3} + i\sin\dfrac{\beta-\alpha}{3}\right) \\ w_1 = \sqrt[3]{\dfrac{s}{r}}\left\{\cos\left(\dfrac{\beta-\alpha}{3} + \dfrac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\beta-\alpha}{3} + \dfrac{2}{3}\pi\right)\right\} \\ w_2 = \sqrt[3]{\dfrac{s}{r}}\left\{\cos\left(\dfrac{\beta-\alpha}{3} + \dfrac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\beta-\alpha}{3} + \dfrac{4}{3}\pi\right)\right\} \end{cases}$$

であるから，面積を求める三角形は半径 $\sqrt[3]{\dfrac{s}{r}}$ の円に内接する正三角形であり，その 1 辺の長さを l とすると，正弦定理より，

$$\frac{l}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = 2\sqrt[3]{\frac{s}{r}} \quad \text{すなわち} \quad l = \sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{s}{r}}$$

である。よって，面積 S は，

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{s}{r}\right)^2}$$

ここで，複素数 A，B の表す点は，ともに点 i を中心とする半径 $\dfrac{7}{9}$ の円周上を動くから，A の絶対値 r，B の絶対値 s のとりうる値の範囲は，

$$\begin{cases} \dfrac{2}{9} \leqq r \leqq \dfrac{16}{9} \\ \dfrac{2}{9} \leqq s \leqq \dfrac{16}{9} \end{cases}$$

となる。よって，$\dfrac{s}{r}$ の最大値は

$$\frac{\dfrac{16}{9}}{\dfrac{2}{9}} = 8$$

このとき S も最大となるので，S の最大値は

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt[3]{8^2} = \underset{\text{オ}}{3\sqrt{3}}$$

〔2〕
$$\begin{cases} A = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) \\ B = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

であるから，

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

である。

$P_3(z)$ を $P_2(z)$ で割ると，

$$\begin{aligned} Az^3 - B &= (Az^2 - B)z + Bz - B \\ &= (Az^2 - B)z + iz - i \end{aligned}$$

となるから，

$$C=\underbrace{1}_{\text{カ}},\ D=\underbrace{0}_{\text{キ}},\ E=\underbrace{i}_{\text{ク}},\ F=\underbrace{-i}_{\text{ケ}}$$

問題文で与えられた等式に $z=z_0$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
R&=P_4(z_0)-P_1(z_0)Q(z_0)\\
&=P_4(z_0)\\
&=A(z_0)^4-B\\
&=A\left(\frac{B}{A}\right)^4-B\\
&=B\left\{\left(\frac{B}{A}\right)^3-1\right\}\\
&=i\left\{\frac{1}{8}(\cos\pi+i\sin\pi)-1\right\}\\
&=\underbrace{-\frac{9}{8}}_{\text{コ}}i
\end{aligned}$$

$P_{11}(z)$ を $P_2(z)$ で割ったときの商を $T(z)$ とすると，

$$P_{11}(z)=P_2(z)T(z)+R(z)$$

すなわち，

$$Gz+H=R(z)=P_{11}(z)-P_2(z)T(z)$$

となる。

$P_2(z)=0$ の異なる 2 つの解を w_0，w_1 とし，そのうちの 1 つを w とすると，

$$\begin{aligned}
Gw+H&=P_{11}(w)-P_2(w)T(w)\\
&=P_{11}(w)\\
&=Aw^{11}-B\\
&=Aw(w^2)^5-B\\
&=Aw\left(\frac{B}{A}\right)^5-B\quad(Aw^2-B=0\text{ より})\\
&=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\times\frac{1}{32}\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)w-i\\
&=\frac{1}{16}\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)w-i\\
&=\frac{\sqrt{3}-i}{32}w-i
\end{aligned}$$

が成り立つ。この等式

$$Gw+H=\frac{\sqrt{3}-i}{32}w-i$$

の両辺は w の 1 次式または定数であり，異なる 2 つの w の値に対して成り立つから，

$$G=\underbrace{\frac{\sqrt{3}-i}{32}}_{\text{サ}},\ H=\underbrace{-i}_{\text{シ}}$$

〔Ⅱ〕 $\boxed{\text{ア}}$ $e^{-\frac{(n+1)x}{2}}$ $\boxed{\text{イ}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ $\boxed{\text{ウ}}$ $\dfrac{e^{-\frac{x}{n}}(1-e^{-x})}{1-e^{-\frac{x}{n}}}$ $\boxed{\text{エ}}$ $\dfrac{1}{e-1}$

$\boxed{\text{オ}}$ $\dfrac{e}{(e-1)^2}$ $\boxed{\text{カ}}$ $-\dfrac{k^2}{n^3}xe^{-\frac{k}{n}x}$ $\boxed{\text{キ}}$ $\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{2}$

〔解 説〕

$f_k(x)=e^{-\frac{kx}{n}}$

〔1〕

$$\begin{aligned}P_n(x)&=f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\\&=e^{-\frac{x}{n}}\cdot e^{-\frac{2x}{n}}\cdot\cdots\cdot e^{-\frac{nx}{n}}\\&=e^{-\frac{x}{n}(1+2+\cdots+n)}=e^{-\frac{x}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}}\\&=\underbrace{e^{-\frac{(n+1)x}{2}}}_{\text{ア}}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}P_n\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{-\frac{1}{2}}=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{e}}}_{\text{イ}}$$

〔2〕

$$\begin{aligned}S_n(x)&=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)\\&=e^{-\frac{x}{n}}+e^{-\frac{2x}{n}}+\cdots+e^{-\frac{nx}{n}}\\&=\frac{e^{-\frac{x}{n}}\left\{1-\left(e^{-\frac{x}{n}}\right)^n\right\}}{1-e^{-\frac{x}{n}}}\end{aligned}$$

（∵ 初項 $e^{-\frac{x}{n}}$，公比 $e^{-\frac{x}{n}}$，項数 n の等比数列の和）

$$=\underbrace{\frac{e^{-\frac{x}{n}}(1-e^{-x})}{1-e^{-\frac{x}{n}}}}_{\text{ウ}}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-1}(1-e^{-n})}{1-e^{-1}}=\underbrace{\frac{1}{e-1}}_{\text{エ}}$$

$$e^{-\frac{x}{n}}f_k(x)=e^{-\frac{x}{n}}\cdot e^{-\frac{kx}{n}}=e^{-\frac{(k+1)x}{n}}=f_{k+1}(x)$$

であることに注意して

$$\begin{aligned}T_n(x)&=f_1(x)+2f_2(x)+3f_3(x)+\cdots+nf_n(x)\\e^{-\frac{x}{n}}T_n(x)&=\qquad\qquad f_2(x)+2f_3(x)+\cdots+(n-1)f_n(x)+nf_{n+1}(x)\end{aligned}$$

これらを辺々引いて

$$\begin{aligned}\left(1-e^{-\frac{x}{n}}\right)T_n(x)&=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)-nf_{n+1}(x)\\&=S_n(x)-ne^{-\frac{n+1}{n}x}\end{aligned}$$

これより $T_n(x)=\dfrac{S_n(x)-ne^{-\frac{n+1}{n}x}}{1-e^{-\frac{x}{n}}}$

$$\lim_{n\to\infty}T_n(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(n)-ne^{-n}\cdot e^{-1}}{1-e^{-1}}=\frac{\frac{1}{e-1}-0}{1-e^{-1}}=\underbrace{\frac{e}{(e-1)^2}}_{\text{オ}}$$

〔3〕 $f_k'(x)=-\dfrac{k}{n}e^{-\frac{kx}{n}}$，$f_k''(x)=\dfrac{k^2}{n^2}e^{-\frac{kx}{n}}$，$\log f_1(x)=\log e^{-\frac{x}{n}}=-\dfrac{x}{n}$

これらのことから $g_k(x)=f_k''(x)\log f_1(x)=\underbrace{-\dfrac{k^2}{n^3}xe^{-\frac{k}{n}x}}_{\text{カ}}$

$$G_n=g_1\left(\frac{1}{n}\right)+g_2\left(\frac{2}{n}\right)+g_3\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+g_n\left(\frac{n}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}g_k\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ -\frac{k^3}{n^4} e^{-\left(\frac{k}{n}\right)^2} \right\}$$

$$= -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3 e^{-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

区分求積法を用いて

$$\lim_{n\to\infty} G_n = -\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx$$

$$= \left[\ \frac{x^2+1}{2} e^{-x^2}\ \right]_0^1$$

$$= \underbrace{\frac{1}{e} - \frac{1}{2}}_{\text{キ}}$$

III

$\boxed{\text{ア}}$ $t+1$　$\boxed{\text{イ}}$ $1-t$　$\boxed{\text{ウ}}$ $1-2t-t^2$　$\boxed{\text{エ}}$ $-6t^4+4t^3+2t^2-4t+1$　$\boxed{\text{オ}}$ $\dfrac{4}{3}$

$\boxed{\text{カ}}$ -1　$\boxed{\text{キ}}$ $\dfrac{1}{3}$　$\boxed{\text{ク}}$ $-\dfrac{1}{2}$　$\boxed{\text{ケ}}$ -3　$\boxed{\text{コ}}$ $\dfrac{21}{8}$　$\boxed{\text{サ}}$ -3　$\boxed{\text{シ}}$ $\dfrac{21}{8}$

■解説□

$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=1$ より,

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=1$$

$$s^2-t=1 \qquad \therefore s^2=t+1 \ \cdots ①$$

を得る.

$$\begin{aligned}
\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\alpha\beta \\
&= 1-t \\
\alpha^4+\beta^4 &= (\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2 \\
&= (1-t)^2-2t^2 \\
&= 1-2t-t^2 \\
\alpha^8-5\alpha^4\beta^4+\beta^8 &= (\alpha^4+\beta^4)^2-7(\alpha\beta)^4 \\
&= (1-2t-t^2)^2-7t^4 \\
&= -6t^4+4t^3+2t^2-4t+1
\end{aligned}$$

である.

今, $s=\alpha+\beta$, $t=\alpha\beta$ なので, 解と係数の関係より α, β は z の 2 次方程式 $z^2-sz+t=0 \ \cdots ②$ の 2 解である. よって α, β が実数であるための条件は ② が実数解をもつ, すなわち ② の判別式が 0 以上であることで, これより $s^2-4t \geqq 0 \ \cdots ③$ となる. ① かつ ③ より s のとりうる値の範囲は,

$$s^2-4(s^2-1) \geqq 0$$

$$s^2 \leqq \frac{4}{3} \qquad \therefore -\frac{2}{\sqrt{3}} \leqq s \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

であり, これより s^2 のとりうる値の範囲は $0 \leqq s^2 \leqq \dfrac{4}{3}$ となる. これと ① より t のとりうる値の範囲は,

$$0 \leqq t+1 \leqq \frac{4}{3} \qquad \therefore -1 \leqq t \leqq \frac{1}{3}$$

となる.

$f(t)=-6t^4+4t^3+2t^2-4t+1$ より,

$$\begin{aligned}
f'(t) &= -24t^3+12t^2+4t-4 \\
&= -4(2t+1)(3t^2-3t+1) \\
&= -4(2t+1)\left\{3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}
\end{aligned}$$

であるから，$f'(t)=0$ かつ $-1 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$ を満たす t の値は $t=-\dfrac{1}{2}$ であり，$f(t)$ の増減は下表のようになる．

t	-1	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	-3	$\nearrow$	$\dfrac{21}{8}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{27}$

よって，$-1 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$ における $f(t)$ の値域は $-3 \leqq f(t) \leqq \dfrac{21}{8}$ である．

（1）において $x=\alpha$ かつ $y=\beta$ と置き換えて考えれば，上の結果から,（1）の第 1 式を満たす実数 x，y が存在するような c の値の範囲は $-3 \leqq c \leqq \dfrac{21}{8}$ となるのだから，連立方程式（1）が実数解をもつための c の条件は $-3 \leqq c \leqq \dfrac{21}{8}$ に他ならない．

IV

〔1〕	ア	$(1-p_1)\,p_2$	イ	$(1-p_2)\,p_3$		
〔2〕	ウ	$\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$	エ	$\dfrac{1}{e}$	オ	$\dfrac{2}{n+2}$
〔3〕	カ	$p_1\,(1-p_1)^{k-1}$	キ	$kp_1\,(1-p_1)^{k-1}$		
〔4〕	ク	$q\,(1-q)^{k-1}$	ケ	$\dfrac{k!}{m!\,(k-m)!}\cdot q^m\,(1-q)^{k-m}$		

■ 解説 □

〔1〕1 回の試行において箱 B_2 に玉が入る条件は，

箱 B_1 に玉が入らない　かつ　箱 B_2 に玉が入る

ことであるから，求める確率は，$\underbrace{(1-p_1)\,p_2}_{ア}$

また，1 回の試行において箱 B_1 に玉が入らない条件のもとで，箱 B_3 に玉が入る条件は，

箱 B_2 に玉が入らない　かつ　箱 B_3 に玉が入る

ことであるから，求める条件つき確率は，$\underbrace{(1-p_2)\,p_3}_{イ}$

〔2〕$p_i=\dfrac{1}{n}$ $(i=1,\,2,\,\cdots,\,n)$ であるとき，求める確率 C_n は，

$$C_n=\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{n\text{ 個}}=\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{ウ}$$

であり，$x=-\dfrac{1}{n}$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $x\to 0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^{-1}=\underbrace{\frac{1}{e}}_{エ}$$

また，$p_i=\dfrac{1}{i+2}$ $(i=1,\,2,\,\cdots,\,n)$ であるとき，求める確率 C_n は，

$$\begin{aligned}C_n&=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\cdots\cdot\frac{\cancel{n+1}}{n+2}=\underbrace{\frac{2}{n+2}}_{オ}\end{aligned}$$

〔3〕k 回目の試行において箱 B_1 に玉が初めて入る条件は，$k\geqq 2$ のとき，

最初の $(k-1)$ 回の試行では箱 B_1 に玉が入らない

かつ　k 回目の試行において箱 B_1 に玉が入る

ことであるから，求める確率は，$\underbrace{p_1\,(1-p_1)^{k-1}}_{カ}$　これは $k=1$ でも成り立つ．

また，k 回目の試行が終わった時点で箱 B_1 に玉が 1 個だけ入る条件は，

k 回の試行のうち 1 回だけ箱 B_1 に玉が入り，

残りの $(k-1)$ 回は箱 B_1 に玉が入らない

ことであるから，求める確率は，

$${}_k\mathrm{C}_1\cdot p_1\cdot(1-p_1)^{k-1}=\underbrace{kp_1\,(1-p_1)^{k-1}}_{キ}$$

〔4〕k 回目の試行において箱 B_3 に玉が初めて入る条件は，$k \geqq 2$ のとき，

最初の $(k-1)$ 回の試行では箱 B_3 に玉が入らない

かつ　k 回目の試行において箱 B_3 に玉が入る

ことであるから，求める確率は，$\underbrace{q(1-q)^{k-1}}_{ク}$　これは $k=1$ でも成り立つ．

また，k 回目の試行が終わった時点で箱 B_3 に玉が m 個だけ入る条件は，

k 回の試行のうち m 回だけ箱 B_3 に玉が入り，

残りの $(k-m)$ 回は箱 B_3 に玉が入らない

ことであるから，求める確率は，

$$ {}_k\mathrm{C}_m \cdot q^m \cdot (1-q)^{k-m} = \underbrace{\frac{k!}{m!\,(k-m)!} \cdot q^m (1-q)^{k-m}}_{ケ} $$