I

$\boxed{ア}$ 3　$\boxed{イ}$ 15　$\boxed{ウ}$ 9　$\boxed{エ}$ 90　$\boxed{オ}$ 6　$\boxed{カ}$ 330　$\boxed{キ}$ $\dfrac{1}{15}$　$\boxed{ク}$ $\dfrac{2}{3}$

■解説□

点Aを原点とする座標空間内に，B(4, 2, 0)，C(2, 2, 2)，D(4, 2, 2)，P(2, 1, 0)，R(2, 1, 1)となるように題意の立体を置く．

〔1〕(a) ア　点Aを出発して点Pに至るための条件は x 軸方向，y 軸方向，z 軸方向にそれぞれ $+2$，$+1$，$+0$ だけ移動することであり，これは x，x，y の3文字の並べかえの総数に等しい．よって同じものを含む順列の考え方から，求める場合の数は $\dfrac{3!}{2!1!0!}=3$（通り）である．

イ　アと同様に考えて $\dfrac{6!}{4!2!0!}=15$（通り）である．

ウ　アと同様に考えると，点Pから点Bまでの経路は $\dfrac{3!}{2!1!0!}=3$ 通りだけある．これとアの結果から，求める場合の数は $3\cdot3=9$（通り）である．

以下，上と同様に考えて場合の数を求めてゆく．

(b) エ　$\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$（通り）$\cdots$①

オ　$\dfrac{3!}{2!1!0!}\cdot1\cdot\dfrac{2!}{0!1!1!}=6$（通り）$\cdots$②

(c) カ　点Cと点(3, 2, 2)が辺で繋がっていると仮定すると，点Aから点Dまでの経路の総数は $\dfrac{8!}{4!2!2!}=420$（通り）である．点Aから点Cおよび点(3, 2, 2)を通って点Dまで至る経路の総数 $\dfrac{6!}{2!2!2!}\cdot1\cdot1=90$（通り）をこの420から引いたものが求める場合の数である．よって求める場合の数は $420-90=330$（通り）である．

〔2〕キ　点Aから点Cまでの経路の総数，点Aから点Pと点Rの両方を通って点Cまで至る経路の総数はそれぞれ①，②なのだから，求める確率は②÷①，すなわち $6\div90=\dfrac{1}{15}$ である．

ク　点Aから点Pを通って点Cまで至る経路は $\dfrac{3!}{2!1!0!}\cdot\dfrac{3!}{0!1!2!}=9$ $\cdots$③ 通りだけある．点Aから点Pと点Rの両方を通って点Cまで至る経路の総数は②なので，求める確率は②÷③，すなわち $6\div9=\dfrac{2}{3}$ である．

II

$\boxed{\text{ア}}$ $\sqrt{x^2-(2a-1)x+a^2}$　　$\boxed{\text{イ}}$ $\dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{ウ}}$ 0　　$\boxed{\text{エ}}$ a　　$\boxed{\text{オ}}$ 1　　$\boxed{\text{カ}}$ $(0,\ 0)$

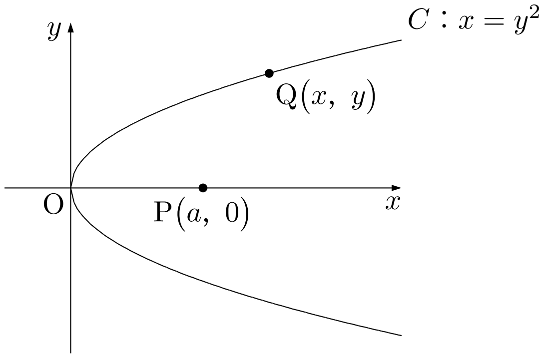
$\boxed{\text{キ}}$ $a-\dfrac{1}{2}$　　$\boxed{\text{ク}}$ $\sqrt{a-\dfrac{1}{4}}$　　$\boxed{\text{ケ}}$ 2

$\boxed{\text{コ}}$ $\left(a-\dfrac{1}{2},\ \sqrt{a-\dfrac{1}{2}}\right)$, $\left(a-\dfrac{1}{2},\ -\sqrt{a-\dfrac{1}{2}}\right)$

■解説□

2 点 P，Q の距離は，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} &= \sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2} \\ &= \sqrt{x^2-2ax+a^2+y^2} \\ &= \sqrt{x^2-2ax+a^2+x} \\ &= \underbrace{\sqrt{x^2-(2a-1)x+a^2}}_{\text{ア}}\end{aligned}$$



$g(x)=x^2-(2a-1)x+a^2$ とおくと，$f(x)=\sqrt{g(x)}$ と表せ，$g(x)$ が最小となるとき，$f(x)$ も最小となる。

$x \geqq 0$ において，$g(x)$ の最小値を考える。

$$g(x)=\left(x-\frac{2a-1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}=\left\{x-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right\}^2+a-\frac{1}{4}$$

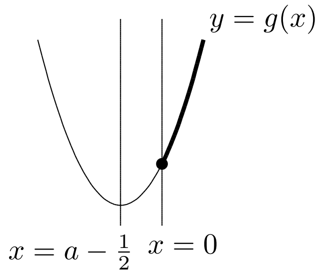
(i) $a-\dfrac{1}{2} \leqq 0$ つまり $a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，

$g(x)$ は $x=0$ で最小となり，最小値 a^2

よって，$a>0$ より

$a \leqq \underbrace{\dfrac{1}{2}}_{\text{イ}}$ のとき $f(x)$ は $x=\underbrace{0}_{\text{ウ}}$ で最小値 $\sqrt{a^2}=\underbrace{a}_{\text{エ}}$

をもち，このとき点 Q は $\underbrace{\mathrm{Q}(0,\ 0)}_{\text{カ}}$ の $\underbrace{1}_{\text{オ}}$ 個である。

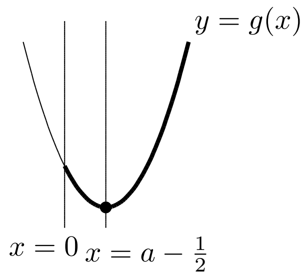


(ii) $a-\dfrac{1}{2}>0$ つまり $a>\dfrac{1}{2}$ のとき，

$g(x)$ は $x=a-\dfrac{1}{2}$ で最小となり，最小値 $a-\dfrac{1}{4}$

よって，$a>\dfrac{1}{2}$ より

$a>\dfrac{1}{2}$ のとき $f(x)$ は $x=\underbrace{a-\dfrac{1}{2}}_{\text{キ}}$ で最小値 $\underbrace{\sqrt{a-\dfrac{1}{4}}}_{\text{ク}}$



をもち，このとき点 Q は $\underbrace{\mathrm{Q}\left(a-\dfrac{1}{2},\ \sqrt{a-\dfrac{1}{2}}\right),\ \left(a-\dfrac{1}{2},\ -\sqrt{a-\dfrac{1}{2}}\right)}_{\text{コ}}$ の $\underbrace{2}_{\text{ケ}}$ 個である。

III

ア	$\frac{2}{5}\pi$	イ	0	ウ	1	エ	1	オ	1	カ	1
キ	5	ク	$\frac{1}{2}$	ケ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	コ	$\frac{5}{2}$	サ	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$		

■解説□

$\omega = \cos\theta + i\sin\theta$ において，$\omega^5 = 1$ を満たすことから，

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta = 1$$

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ において，$\cos\theta > 0$，$\sin\theta > 0$ であることから，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

これより，$0 < 5\theta < \dfrac{5}{2}\pi$ であることに注意すると，$\cos 5\theta + i\sin 5\theta = 1$ を満たす θ は，

$$5\theta = 2\pi \qquad \text{これを解いて，} \theta = \underbrace{\frac{2}{5}\pi}_{ア}$$

また，$\omega^5 = 1$ より，

$$1 - \omega^5 = 0$$
$$(1-\omega)(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4) = 0$$

ここで，$\omega = \cos\dfrac{2}{5}\pi + i\sin\dfrac{2}{5}\pi \fallingdotseq 1$ より，$1 - \omega \fallingdotseq 0$ であるので，

$$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = \underbrace{0}_{イ}$$

次に，複素数 z に対して，$\omega^5 = 1$，$\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = -1$ に注意すると，

$$\begin{aligned}
&(1-\omega z)(1-\omega^2 z)(1-\omega^3 z)(1-\omega^4 z)\\
&\quad= \left\{1-(\omega+\omega^4)z+\omega^5 z^2\right\}\left\{1-(\omega^2+\omega^3)z+\omega^5 z^2\right\}\\
&\quad= \left\{1-(\omega+\omega^4)z+z^2\right\}\left\{1-(\omega^2+\omega^3)z+z^2\right\}\\
&\quad= \left\{(1+z^2)-(\omega+\omega^4)z\right\}\left\{(1+z^2)-(\omega^2+\omega^3)z\right\}\\
&\quad= (1+z^2)^2-(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)z(1+z^2)+(\omega+\omega^4)(\omega^2+\omega^3)z^2\\
&\quad= 1+2z^2+z^4+z(1+z^2)+(\omega^3+\omega^4+\omega^6+\omega^7)z^2\\
&\quad= 1+2z^2+z^4+z+z^3+(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)z^2\\
&\quad= 1+z+2z^2+z^3+z^4-z^2\\
&\quad= 1+\underbrace{1}_{ウ}\cdot z+\underbrace{1}_{エ}\cdot z^2+\underbrace{1}_{オ}\cdot z^3+\underbrace{1}_{カ}\cdot z^4
\end{aligned}$$

これより，

$$(1-\omega z)(1-\omega^2 z)(1-\omega^3 z)(1-\omega^4 z) = 1+z+z^2+z^3+z^4 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つので，式 ① に $z = \alpha$ を代入すると，

$$(1-\omega\alpha)(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha) = 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4 \quad \cdots\cdots ②$$

式 ① に $z = \omega\alpha$ を代入すると，

$$(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)(1-\omega^5\alpha) = 1+\omega\alpha+\omega^2\alpha^2+\omega^3\alpha^3+\omega^4\alpha^4 \quad \cdots\cdots ③$$

$\omega^5 = 1$ に注意して，式 ① に $z = \omega^2\alpha$ を代入すると，

$$(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)(1-\omega^5\alpha)(1-\omega^6\alpha) = 1+\omega^2\alpha+\omega^4\alpha^2+\omega^6\alpha^3+\omega^8\alpha^4$$
$$(1-\omega\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)(1-\omega^5\alpha) = 1+\omega^2\alpha+\omega^4\alpha^2+\omega\alpha^3+\omega^3\alpha^4 \quad \cdots\cdots ④$$

同様にして，式 ① に $z=\omega^3\alpha$ を代入すると，

$$(1-\omega^4\alpha)(1-\omega^5\alpha)(1-\omega^6\alpha)(1-\omega^7\alpha)=1+\omega^3\alpha+\omega^6\alpha^2+\omega^9\alpha^3+\omega^{12}\alpha^4$$

$$(1-\omega\alpha)(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^4\alpha)(1-\omega^5\alpha)=1+\omega^3\alpha+\omega\alpha^2+\omega^4\alpha^3+\omega^2\alpha^4 \quad \cdots\cdots ⑤$$

式 ① に $z=\omega^4\alpha$ を代入すると，

$$(1-\omega^5\alpha)(1-\omega^6\alpha)(1-\omega^7\alpha)(1-\omega^8\alpha)=1+\omega^4\alpha+\omega^8\alpha^2+\omega^{12}\alpha^3+\omega^{16}\alpha^4$$

$$(1-\omega\alpha)(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^5\alpha)=1+\omega^4\alpha+\omega^3\alpha^2+\omega^2\alpha^3+\omega\alpha^4 \quad \cdots\cdots ⑥$$

式 ②〜⑥ の両辺を加えることにより，式 (∗) の右辺は，$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$ に注意すると，

$$\begin{array}{rl}
 & 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4 \quad \cdots\cdots ② \\
 & 1+\omega\alpha+\omega^2\alpha^2+\omega^3\alpha^3+\omega^4\alpha^4 \quad \cdots\cdots ③ \\
 & 1+\omega^2\alpha+\omega^4\alpha^2+\omega\alpha^3+\omega^3\alpha^4 \quad \cdots\cdots ④ \\
 & 1+\omega^3\alpha+\omega\alpha^2+\omega^4\alpha^3+\omega^2\alpha^4 \quad \cdots\cdots ⑤ \\
+) & 1+\omega^4\alpha+\omega^3\alpha^2+\omega^2\alpha^3+\omega\alpha^4 \quad \cdots\cdots ⑥ \\
\hline
 & 5+(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)=\underset{\text{キ}}{5}
\end{array}$$

特に，$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{15}+i\sin\dfrac{\pi}{15}$ であるとき，$\omega^5=1$ に注意して，式 ② を用いると，

$$\begin{aligned}
&(1-\omega\alpha)(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)(1-\omega^5\alpha)\\
&=(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)(1-\alpha)=1-\alpha^5\\
&=1-\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)^5=1-\left\{\cos\left(\frac{\pi}{15}\times 5\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{15}\times 5\right)\right\}\\
&=1-\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\underset{\text{ク}}{\frac{1}{2}}-i\cdot\underset{\text{ケ}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}
\end{aligned}$$

これより，$(1-\omega\alpha)(1-\omega^2\alpha)(1-\omega^3\alpha)(1-\omega^4\alpha)(1-\omega^5\alpha)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\ (\neq 0)$ であり，

$$\frac{1}{1-\omega\alpha}+\frac{1}{1-\omega^2\alpha}+\frac{1}{1-\omega^3\alpha}+\frac{1}{1-\omega^4\alpha}+\frac{1}{1-\omega^5\alpha}=\frac{\text{式 }(*)\text{ の左辺}}{\text{式 }(**)\text{ の左辺}}$$

となるから，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-\omega\alpha}+\frac{1}{1-\omega^2\alpha}+\frac{1}{1-\omega^3\alpha}+\frac{1}{1-\omega^4\alpha}+\frac{1}{1-\omega^5\alpha}\\
&=\frac{5}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=5\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&=5\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\underset{\text{コ}}{\frac{5}{2}}+i\cdot\underset{\text{サ}}{\frac{5\sqrt{3}}{2}}
\end{aligned}$$

である。

IV

ア	1	イ	n	ウ	x	エ	$(1-x^2)$	オ	x
カ	$2x$	キ	$\frac{1}{4}$	ク	$\frac{1}{4}$	ケ	$\frac{1}{8}$	コ	$\frac{1}{4}$

■解説□

$-1<x<1$ を満たすすべての x に対して，

$$x=\cos\theta \quad (0<\theta<\pi)$$

を満たす θ がただ 1 つ存在する。以下，この θ を利用して考える。

$x\to 1-0$ のとき，$\theta\to +0$ となるから，

$$\lim_{x\to 1-0} T_n(x)=\lim_{\theta\to+0} T_n(\cos\theta)=\lim_{\theta\to+0}\cos n\theta=\cos 0=\underbrace{1}_{ア}$$

であり，

$$\lim_{x\to 1-0} U_n(x)=\lim_{\theta\to+0} U_n(\cos\theta)=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin n\theta}{n\theta}\cdot n\right)=1\cdot 1\cdot n=\underbrace{n}_{イ}$$

次に，

$$\begin{aligned}T_{n+1}(x)&=T_{n+1}(\cos\theta)=\cos(n\theta+\theta)=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta\\&=\cos\theta\cos n\theta-\sin^2\theta\cdot\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=\cos\theta\cos n\theta-\left(1-\cos^2\theta\right)\cdot\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\\&=\cos\theta\cdot T_n(\cos\theta)-\left(1-\cos^2\theta\right)U_n(\cos\theta)\\&=\underbrace{x}_{ウ}T_n(x)-\underbrace{\left(1-x^2\right)}_{エ}U_n(x)\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}U_{n+1}(x)&=U_{n+1}(\cos\theta)=\frac{\sin(n\theta+\theta)}{\sin\theta}=\frac{\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta}{\sin\theta}\\&=\cos n\theta+\cos\theta\cdot\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=T_n(\cos\theta)+\cos\theta\cdot U_n(\cos\theta)\\&=T_n(x)+\underbrace{x}_{オ}U_n(x)\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

である。ここで，式 ② より，

$$T_n(x)=U_{n+1}(x)-xU_n(x)$$

であり，これより

$$T_{n+1}(x)=U_{n+2}(x)-xU_{n+1}(x)$$

も成り立つ。この 2 つの等式と式 ① より，$T_{n+1}(x)$，$T_n(x)$ を消去すると

$$U_{n+2}(x)-xU_{n+1}(x)=x\{U_{n+1}(x)-xU_n(x)\}-\left(1-x^2\right)U_n(x)$$

となり，これを整理すると

$$U_{n+2}(x)=\underbrace{2x}_{カ}U_{n+1}(x)-U_n(x)\quad\cdots\cdots③$$

が得られる。式 ③ を利用すると

$$\begin{aligned}U_3(x)&=2xU_2(x)-U_1(x)=2\cos\theta\cdot U_2(\cos\theta)-U_1(x)=2\cos\theta\cdot\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}-U_1(x)\\&=2\cos\theta\cdot\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}-U_1(x)=4\cos^2\theta-U_1(x)=4x^2-U_1(x)\end{aligned}$$

となり，これを整理すると

$$x^2 = \frac{1}{\underbrace{4}_{\text{キ}}} U_3(x) + \frac{1}{\underbrace{4}_{\text{ク}}} U_1(x)$$

が得られる。また，式 ③ と前問の結果を利用すると

$$\begin{aligned}
U_4(x) &= 2xU_3(x) - U_2(x) = 2x\left\{4x^2 - U_1(x)\right\} - U_2(x) \\
&= 8x^3 - U_2(x) - 2\cos\theta \cdot \underbrace{U_1(\cos\theta)}_{=1} \\
&= 8x^3 - U_2(x) - \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} \\
&= 8x^3 - U_2(x) - U_2(\cos\theta) \\
&= 8x^3 - 2U_2(x)
\end{aligned}$$

であり，これを整理すると

$$x^3 = \frac{1}{\underbrace{8}_{\text{ケ}}} U_4(x) + \frac{1}{\underbrace{4}_{\text{コ}}} U_2(x)$$

が得られる。