I

〔1〕	ア	$r^2+2pqr+(pq)^2$	イ	$(pq)^{n-k}$	ウ	r^n	エ	st				
〔2〕	オ	2	カ	6	キ	6	ク	5	ケ	22	コ	142

〔1〕　問題より, $x=pq+r$ と表せるので

$$x^2=(pq+r)^2=\underline{\boldsymbol{r^2+2pqr+(pq)^2}}\cdots(\textbf{ア})$$

n を自然数として, x^n について同様に考えると

$$\begin{aligned} x^n &= (pq+r)^n \\ &= {}_n\mathrm{C}_0(pq)^n\cdot r^0+{}_n\mathrm{C}_1(pq)^{n-1}\cdot r^1+{}_n\mathrm{C}_2(pq)^{n-2}\cdot r^2+\cdots \\ &\qquad\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}(pq)^1\cdot r^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n(pq)^0\cdot r^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,\underline{\boldsymbol{(pq)^{n-k}}}\,r^k\cdots(\textbf{イ}) \end{aligned}$$

よって,

$$x^n=pq\sum_{k=0}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k(pq)^{n-k-1}r^k+r^n$$

と表せ, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k(pq)^{n-k-1}r^k$ は整数であるから,

x^n を p で割った余りは $\underline{\boldsymbol{r^n}}\cdots(\textbf{ウ})$ を p で割った余りと等しい.

自然数 $i,\ j$ に対して x^i を p で割った余りを s, x^j を p で割った余りを t とすると

$$x^i=pS+s,\ x^j=pT+t\qquad(S,\ T\text{ は整数})$$

と表せるので

$$x^{i+j}=x^i\cdot x^j=(pS+s)\cdot(pT+t)=p(pST+St+Ts)+st$$

よって, $pST+St+Ts$ は整数であるから,

x^{i+j} を p で割った余りは $\underline{\boldsymbol{st}}\cdots(\textbf{エ})$ を p で割った余りと等しい.

〔2〕　$31=7\cdot 4+3$ と〔1〕の $\boxed{\text{ウ}}$ より，

「31^2 を 7 で割った余りは 3^2 を 7 で割った余りと等しい」

ので，31^2 を 7 で割った余りは $\underset{\sim}{\mathbf{2}}\cdots$(**オ**) である．

31 を 7 で割った余りが 3，31^2 を 7 で割った余りが 2 であるから，〔1〕の $\boxed{\text{エ}}$ より，

「31^3 を 7 で割った余りは $3\cdot 2$ を 7 で割った余りと等しい」

ので，31^3 を 7 で割った余りは $\underset{\sim}{\mathbf{6}}\cdots$(**カ**) である．

これらのことより，

31^4 を 7 で割った余りは $3\cdot 6$ を 7 で割った余りと等しく 4

31^5 を 7 で割った余りは $3\cdot 4$ を 7 で割った余りと等しく 5

31^6 を 7 で割った余りは $3\cdot 5$ を 7 で割った余りと等しく 1

31^7 を 7 で割った余りは $3\cdot 1$ を 7 で割った余りと等しく 3

とわかるので，自然数 k について，31^k を 7 で割った余りは

3，2，6，4，5，1

を繰り返す．

よって，31^k を 7 で割った余りが 1 となるのは，k が $\underset{\sim}{\mathbf{6}}\cdots$(**キ**) の倍数となるときである．

同様に考えると，31 を 11 で割った余りは 9 であるから

31^2 を 11 で割った余りは $9\cdot 9$ を 11 で割った余りと等しく 4

31^3 を 11 で割った余りは $9\cdot 4$ を 11 で割った余りと等しく 3

31^4 を 11 で割った余りは $9\cdot 3$ を 11 で割った余りと等しく 5

31^5 を 11 で割った余りは $9\cdot 5$ を 11 で割った余りと等しく 1

31^6 を 11 で割った余りは $9\cdot 1$ を 11 で割った余りと等しく 9

とわかるので，自然数 k について，31^k を 11 で割った余りは

9，4，3，5，1

を繰り返す．

よって，31^k を 11 で割った余りが 1 となるのは，k が $\underset{\sim}{\mathbf{5}}\cdots$(**ク**) の倍数となるときである．

以上より, 31^k を 7 で割った余りが 4 となるのは $k=6l-2$ (l は自然数) のときで, 31^k を 11 で割った余りが 4 となるのは $k=5m-3$ (m は自然数) のときとわかる.

$6l-2=5m-3$ を満たす自然数 $l,\ m$ を求めると

$$6l-5m=-1$$

$$6(l+1)-5(m+1)=0$$

$$6(l+1)=5(m+1)$$

5 と 6 は互いに素であるから, 自然数 a を用いて

$$l+1=5a,\ m+1=6a$$

$$\therefore\ \ l=5a-1,\ m=6a-1$$

よって, 31^k を 7 で割った余りと 11 で割った余りがともに 4 になる自然数 k は

$$k=6(5a-1)-2=30a-8 \qquad (k=5(6a-1)-3=30a-8)$$

とわかるので,

自然数 k で最小のものは, $a=1$ のときで $k=30-8=\mathbf{22}\cdots$(**ケ**)

自然数 k で 5 番目に小さいものは, $a=5$ のときで $k=30\cdot5-8=\mathbf{142}\cdots$(**コ**)

II

〔1〕	ア	$(1+p^2)\vec{a}-p^2\vec{b}$	イ	$p^2\vec{b}$	ウ	p^4
〔2〕	エ	$(1+p^2)\vec{a}-p^2(1+p^2)\vec{b}$	オ	$\dfrac{1}{1-p^2}$	カ	$\dfrac{1}{1-p^2}$
〔3〕	キ	$\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$	ク	$\dfrac{2p}{1+p^2}$		

■ 解説 □

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，$\left|\vec{b}\right|=1$, $\left|\vec{a}\right|=p \ (0<p<1)$

〔1〕線分 AB を $p^2:(1+p^2)$ に外分する点を $\mathrm{A_1}$ とするので

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=\frac{(1+p^2)\vec{a}+(-p^2)\vec{b}}{-p^2+(1+p^2)}=\underbrace{(1+p^2)\vec{a}-p^2\vec{b}}_{ア}$$

点 $\mathrm{O_1}$ を

$$\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}-p^2\vec{a}=\vec{a}-p^2\vec{b}$$

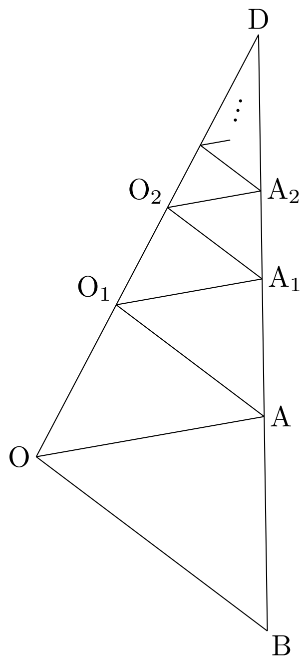
を満たすようにとるので

$$\overrightarrow{\mathrm{O_1A}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}=\underbrace{p^2\vec{b}}_{イ}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{O_1A_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}=p^2\vec{a}$$

$\triangle\mathrm{OAB}\backsim\triangle\mathrm{O_1A_1A}$ であり，相似比は $1:p^2$，面積比は $1^2:(p^2)^2=1:p^4$

よって，$\triangle\mathrm{O_1A_1A}$ の面積は $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積の $\underbrace{p^4}_{ウ}$ 倍である．



〔2〕〔1〕と同様にすることから，〔1〕で点 O を $\mathrm{O_1}$，点 A を $\mathrm{A_1}$，点 B を A とすることを考えて

$$\overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}}=\overrightarrow{\mathrm{O_1A_1}}-p^2\overrightarrow{\mathrm{O_1A}}=p^2\vec{a}-p^4\vec{b}$$
$$=p^2\left(\vec{a}-p^2\vec{b}\right)=p^2\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}$$

これより

$$\overrightarrow{\mathrm{OO_2}}=(1+p^2)\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}=(1+p^2)\left(\vec{a}-p^2\vec{b}\right)$$
$$=\underbrace{(1+p^2)\vec{a}-p^2(1+p^2)\vec{b}}_{エ}$$

次に

$\triangle\mathrm{O_1A_1A}\backsim\triangle\mathrm{O_2A_2A_1}$,

$\triangle\mathrm{O}_{n-1}\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_{n-2}\backsim\triangle\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n-1}\ (n=3,\ 4,\ \cdots)$

であり，いずれも相似比は $1:p^2$ である．

直線 AB と直線 $\mathrm{OO_1}$ の交点を D とするので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{D}}\right|=0$ を用いて

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|=\mathrm{BA}+\mathrm{AA_1}+\mathrm{A_1A_2}+\cdots$$
$$=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|+p^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|+p^4\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|+\cdots=\underbrace{\frac{1}{1-p^2}}_{オ}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$$

$\left(\because\ 初項が\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|，公比が\ p^2\ \ (0<p^2<1)\ の無限等比級数\right)$

O，$\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$，$\cdots$ は同一直線上にあり，線分の比 $\mathrm{OO_1} : \mathrm{O_1O_2} = 1 : p^2$，

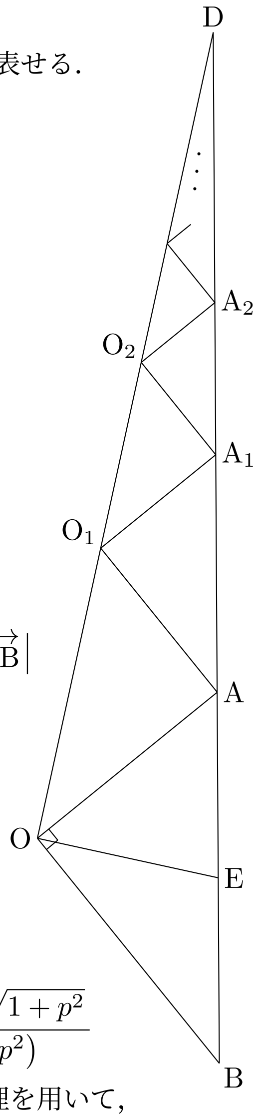
$\mathrm{O}_{n-2}\mathrm{O}_{n-1} : \mathrm{O}_{n-1}\mathrm{O}_n = 1 : p^2 \ (n = 3, 4, \cdots)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{D}}\right| = 0$ を用いて

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right| = \mathrm{OO_1} + \mathrm{O_1O_2} + \mathrm{O_2O_3} + \cdots = \left|\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}\right| + p^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}\right| + p^4\left|\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}\right| + \cdots$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1-p^2}}_{\text{カ}}\left|\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}\right|$$

$\left(\because\right.$ 初項が $\left|\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}\right|$，公比が $p^2\ (0 < p^2 < 1)$ の無限等比級数$\left.\right)$

〔3〕$\angle\mathrm{AOB} = 90^\circ$ とするので $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$



点 E は直線 AB 上にあるので，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ と表せる．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OO_1}} &= \left\{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\right\}\cdot\left(\vec{a} - p^2\vec{b}\right)\\ &= (1-t)\left|\vec{a}\right|^2 - p^2t\left|\vec{b}\right|^2\\ &= p^2(1-t) - p^2t = p^2(1-2t)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OO_1}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OO_1}} = 0$　なので $t = \dfrac{1}{2}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \underbrace{\dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}}_{\text{キ}}$

これより，点 E は線分 AB の中点である．

次に，$\mathrm{OA} : \mathrm{AO_1} = \mathrm{OB} : \mathrm{AO} = 1 : p$ かつ $\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{O_1AO} = 90^\circ$ より，

$\triangle\mathrm{OAB} \backsim \triangle\mathrm{AO_1O}$ であることから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}\right| = p\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$

〔2〕より $\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right| = \dfrac{1}{1-p^2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}\right| = \dfrac{p}{1-p^2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$

また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{ED}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right| - \left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right| = \dfrac{1}{1-p^2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| - \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \dfrac{1+p^2}{2\left(1-p^2\right)}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$

よって $\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{ED}}\right|} = \underbrace{\dfrac{2p}{1+p^2}}_{\text{ク}}$

$\boxed{\text{ク}}$ の $\boxed{\textbf{別解}}$

$\triangle\mathrm{OAB}$ に三平方の定理を用いて $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{1+p^2}$

〔2〕より $\left|\overrightarrow{\mathrm{ED}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right| - \left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right| = \dfrac{1}{1-p^2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| - \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \dfrac{\left(1+p^2\right)\sqrt{1+p^2}}{2\left(1-p^2\right)}$

$\mathrm{OA} = p$，$\mathrm{O_1A} = p^2$，$\angle\mathrm{OAO_1} = 90^\circ$ であるから $\triangle\mathrm{OAO_1}$ に三平方の定理を用いて，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}\right| = p\sqrt{1+p^2}$$

〔2〕より $\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right| = \dfrac{1}{1-p^2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OO_1}}\right| = \dfrac{p\sqrt{1+p^2}}{1-p^2}$

よって $\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{ED}}\right|} = \underbrace{\dfrac{2p}{1+p^2}}_{\text{ク}}$

III

解答

〔1〕 $\boxed{ア}$ 0 　$\boxed{イ}$ 2 　$\boxed{ウ}$ $4e^{-2}$

〔2〕 $\boxed{エ}$ $a<1$ 　$\boxed{オ}$ $2-\sqrt{2-a}$

〔3〕 $\boxed{カ}$ -2 　$\boxed{キ}$ $a<-1$ 　$\boxed{ク}$ e^2

解説

$\boxed{ア}$と$\boxed{イ}$ 　$a=0$ だから,

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=-x(x-2)e^{-x}$$

となり, この符号は $-x(x-2)$ の符号と一致する．よって,$f(x)$ の増減は以下のようになる．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって,$f(x)$ の極小値を与える x は $x=\underset{\sim}{0}$ であり, 極大値を与える x は $x=\underset{\sim}{2}$ である．

$\boxed{ウ}$

$$\int_0^2 f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_0^2=f(2)-f(0)=\underset{\sim\sim\sim}{4e^{-2}}$$

$\boxed{エ}$ 　$f(x)$ を x で微分すると,

$$f'(x)=2xe^{-x}-(x^2+a)e^{-x}=(-x^2+2x-a)e^{-x}$$

であるから,$f'(x)=0$ を言い換えると,

$$x^2-2x+a=0$$

となる．

この x の 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつための条件を求めればよく, それは

$$(-1)^2-a>0$$
$$\underset{\sim\sim\sim}{a<1}$$

である．

$\boxed{オ}$ 　$f'(x)$ を x で微分すると,

$$\begin{aligned}f''(x)&=(-2x+2)e^{-x}-(-x^2+2x-a)e^{-x}=(x^2-4x+a+2)e^{-x}\\&=\{x-(2-\sqrt{2-a})\}\{x-(2+\sqrt{2-a})\}e^{-x}\end{aligned}$$

であり, この符号は

$$\{x-(2-\sqrt{2-a})\}\{x-(2+\sqrt{2-a})\}$$

の符号と一致する．よって,$f'(x)$ の増減は以下のようになる．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$2-\sqrt{2-a}$	$\cdots$	$2+\sqrt{2-a}$	$\cdots$	(∞)
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

今, 方程式 $f'(x)=(-x^2+2x-a)e^{-x}=0$ について，x の 2 次方程式 $-x^2+2x-a=0$ は異なる 2 つの実数解

$$x=1\pm\sqrt{1-a}$$

をもち, この小さい方を α_1, 大きい方を α_2 とすると,$f'(x)$ の符号は以下のようになる.

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & (x < \alpha_1, \alpha_2 < x \text{ のとき}) \\ f'(x) = 0 & (x = \alpha_1, \alpha_2 \text{のとき}) \\ f'(x) > 0 & (\alpha_1 < x < \alpha_2 \text{のとき}) \end{cases}$$

このことと $f'(x)$ の増減表より,$f'(x)$ の最大値を与える x は

$$x = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2 - \sqrt{2-a}}$$

である.

$\boxed{\text{カ}}$　「部分積分法」を用いると,

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int (x^2+a)e^{-x}dx \\ &= (x^2+a)(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x})dx = -(x^2+a)e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx \\ &= -(x^2+a)e^{-x} + 2x(-e^{-x}) - \int 2(-e^{-x})dx = -(x^2+a)e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C \\ &= (-x^2-2x-a-2)e^{-x} + C \quad (\text{ただし},C\text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

であるから,$f(x)$ の原始関数の 1 つである $g(x)$ も, 定数 D を用いて

$$g(x) = (-x^2-2x-a-2)e^{-x} + D$$

と書けて,

$$g(x)e^x = -x^2 - 2x - a - 2 + De^x$$

となる.

これが x の多項式になるから,$D=0$ とわかる.

よって,$g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt \cdots [1]$ が成り立つとき,

$$\begin{aligned} &g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0 \\ &-a-2 = 0 \\ &a = \underset{\sim\sim}{-2} \end{aligned}$$

が成り立ち, 逆にこのとき,[1] が成り立つ.

$\boxed{\text{キ}}$　$g(x)=0$ を言い換えると

$$-x^2 - 2x - a - 2 = 0 \quad \cdots [2]$$

であり, これが異なる 2 つの実数解をもつ条件を求めればよい. よって,

$$\begin{aligned} &(-1)^2 - (-1)(-a-2) > 0 \\ &\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{a < -1} \end{aligned}$$

が求める必要十分条件となる.

$\boxed{\text{ク}}$　$\boxed{\text{オ}}$のところで調べた $f'(x)$ の符号より,

$$S_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f'(x)dx = \Big[f(x)\Big]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = f(\alpha_2) - f(\alpha_1)$$

とわかる.

次に,$a<-1$ のとき,[2] の異なる 2 つの実数解は

$$x=-1\pm\sqrt{-1-a}$$

であり, この小さい方を β_1, 大きい方を β_2 とおくと,$\boxed{\text{オ}}$のときと同様に考えて,$g(x)$ の符号は以下のようにわかる.

$$\begin{cases} g(x)<0 & (x<\beta_1, \beta_2<x \text{ のとき}) \\ g(x)=0 & (x=\beta_1, \beta_2 \text{のとき}) \\ g(x)>0 & (\beta_1<x<\beta_2 \text{のとき}) \end{cases}$$

これより,

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} g(x)dx = \int_{\beta_1}^{\beta_2} (-x^2-2x-a-2)e^{-x}dx \\ &= \Big[(-x^2-2x-a-2)(-e^{-x})\Big]_{\beta_1}^{\beta_2} - \int_{\beta_1}^{\beta_2} (-2x-2)(-e^{-x})dx \\ &= \Big[(x^2+2x+a+2)e^{-x}\Big]_{\beta_1}^{\beta_2} - \int_{\beta_1}^{\beta_2} (2x+2)e^{-x}dx \\ &= \Big[(x^2+2x+a+2)e^{-x}\Big]_{\beta_1}^{\beta_2} - \left\{\Big[(2x+2)(-e^{-x})\Big]_{\beta_1}^{\beta_2} - \int_{\beta_1}^{\beta_2} 2(-e^{-x})dx\right\} \\ &= \Big[(x^2+4x+a+6)e^{-x}\Big]_{\beta_1}^{\beta_2} \end{aligned}$$

となり,

$$h(x)=(x^2+4x+a+6)e^{-x}$$

とおくと,

$$S_2=h(\beta_2)-h(\beta_1)$$

となる.

ここで,$-a=A$ と置き換えると,

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \frac{h(\beta_2)-h(\beta_1)}{f(\alpha_2)-f(\alpha_1)} = \frac{({\beta_2}^2+4\beta_2-A+6)e^{-\beta_2}-({\beta_1}^2+4\beta_1-A+6)e^{-\beta_1}}{({\alpha_2}^2-A)e^{-\alpha_2}-({\alpha_1}^2-A)e^{-\alpha_1}} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{A-1})e^{1-\sqrt{A-1}}-2(1-\sqrt{A-1})e^{1+\sqrt{A-1}}}{2(1+\sqrt{A+1})e^{-1-\sqrt{A+1}}-2(1-\sqrt{A+1})e^{-1+\sqrt{A+1}}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{A}}+\sqrt{1-\frac{1}{A}}\right)e^{2-\sqrt{A-1}-\sqrt{A+1}}-\left(\frac{1}{\sqrt{A}}-\sqrt{1-\frac{1}{A}}\right)e^{2+\sqrt{A-1}-\sqrt{A+1}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{A}}+\sqrt{1+\frac{1}{A}}\right)e^{-2\sqrt{A+1}}-\left(\frac{1}{\sqrt{A}}-\sqrt{1+\frac{1}{A}}\right)} \end{aligned}$$

(分母分子を $2\sqrt{A}e^{-1+\sqrt{A+1}}$で割った)

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{A}}+\sqrt{1-\frac{1}{A}}\right)e^{2-\sqrt{A-1}-\sqrt{A+1}}-\left(\frac{1}{\sqrt{A}}-\sqrt{1-\frac{1}{A}}\right)e^2e^{\frac{-2}{\sqrt{A-1}+\sqrt{A+1}}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{A}}+\sqrt{1+\frac{1}{A}}\right)e^{-2\sqrt{A+1}}-\left(\frac{1}{\sqrt{A}}-\sqrt{1+\frac{1}{A}}\right)}$$

となるから,

$$\lim_{a\to-\infty}\frac{S_2}{S_1}=\lim_{A\to\infty}\frac{S_2}{S_1}=\frac{0-(-1)\cdot e^2\cdot 1}{0-(-1)}=\underset{\sim}{e^2}$$

となる.

Ⅳ

〔1〕 $\boxed{ア}$ $\frac{1}{2}(X_1+X_2)$ $\boxed{イ}$ $\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$

$\boxed{ウ}$ $(1,\ 1)$ $\boxed{エ}$ $\frac{1}{n}(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n)$

〔2〕 $\boxed{オ}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{カ}$ $\frac{1}{4}$ $\boxed{キ}$ $\frac{1}{8}$

$\boxed{ク}$ $\frac{37}{256}$ $\boxed{ケ}$ $\frac{1}{2}$

〔3〕 $\boxed{コ}$ $(1-p)^n$ $\boxed{サ}$ $\frac{2}{n}$

■解説□

$$a_n=\begin{cases} X_1 & (n=1\text{ のとき}) \\ a_{n-1}-\dfrac{1}{n}(a_{n-1}-X_n) & (n\geqq 2\text{ のとき}) \end{cases} \quad \cdots①$$

〔1〕　①に $n=2$ を代入すると，

$$a_2=a_1-\frac{1}{2}(a_1-X_2)=\frac{1}{2}(a_1+X_2)=\underbrace{\frac{1}{2}(X_1+X_2)}_{ア} \quad \cdots②$$

①に $n=3$ を代入すると，

$$a_3=a_2-\frac{1}{3}(a_2-X_3)=\frac{1}{3}(2a_2+X_3)=\underbrace{\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)}_{イ} \quad \cdots③$$

さらに，①より，

$$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{n+1}(a_n-X_{n+1})\ (n\geqq 1)$$

$$(n+1)a_{n+1}=na_n+X_{n+1}$$

$b_n=na_n$ より，

$$b_{n+1}=b_n+X_{n+1}$$

よって，$(p,\ q)=\underbrace{(1,\ 1)}_{ウ}$

$b_{n+1}-b_n=X_{n+1}$ より，数列 $\{b_n\}$ の階差数列の第 n 項は X_{n+1} であるから，$n\geqq 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} X_{k+1} \\
&= a_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n \\
&= X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n \qquad \cdots ④
\end{aligned}
$$

$n=1$ のとき，$b_1 = X_1$

$b_1 = 1 \cdot a_1 = X_1$ であるから，④は $n=1$ のときも成り立つ．

したがって，

$$
b_n = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n
$$

$$
a_n = \frac{b_n}{n} = \underbrace{\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n)}_{\text{エ}}
$$

〔2〕　各 n について，表が出る確率は常に $\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{オ}}$ である．

$a_2 = 1$ となる確率は，②より

$$
a_2 = 1 \iff X_1 + X_2 = 2 \iff \text{1 回目，2 回目いずれも表が出る}
$$

であるから，$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{カ}}$

$a_3 = 0$ である確率は，③より

$$
\begin{aligned}
a_3 = 0 &\iff X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\
&\iff \text{1 回目，2 回目，3 回目すべて裏が出る}
\end{aligned}
$$

であるから，$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{キ}}$

$a_8 \leqq \frac{1}{4}$ となる条件は，

$$
\begin{aligned}
a_8 \leqq \frac{1}{4} &\iff X_1 + X_2 + \cdots + X_8 \leqq 2 \\
&\iff \text{8 回の試行において，表が出る回数が 2 回以下}
\end{aligned}
$$

であり，8 回の試行において

表が出る回数が 0 回の確率：$\left(\frac{1}{2}\right)^8$

表が出る回数が 1 回の確率：${}_8\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^8$

表が出る回数が 2 回の確率：${}_8\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 28\left(\frac{1}{2}\right)^8$

であるから，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8+8\left(\frac{1}{2}\right)^8+28\left(\frac{1}{2}\right)^8=\underset{ケ}{\underline{\frac{37}{256}}}$$

n が奇数のとき，$a_n \leqq \frac{1}{2}$ である条件は，$n=2m-1$ (m は自然数) とすると，

$$a_{2m-1} \leqq \frac{1}{2} \iff X_1+X_2+\cdots+X_{2m-1} \leqq \frac{2m-1}{2}$$

$\iff$ $2m-1$ 回の試行において，表が出る回数が $m-1$ 回以下

であるから，求める確率を先ほどと同様に計算すると，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}+{}_{2m-1}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}+{}_{2m-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-3}+\cdots+{}_{2m-1}\mathrm{C}_{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}({}_{2m-1}\mathrm{C}_0+{}_{2m-1}\mathrm{C}_1+{}_{2m-1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2m-1}\mathrm{C}_{m-1})$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}\cdot\frac{1}{2}\Big\{({}_{2m-1}\mathrm{C}_0+{}_{2m-1}\mathrm{C}_1+{}_{2m-1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2m-1}\mathrm{C}_{m-1})$$
$$+({}_{2m-1}\mathrm{C}_{m-1}+{}_{2m-1}\mathrm{C}_{m-2}+\cdots+{}_{2m-1}\mathrm{C}_1+{}_{2m-1}\mathrm{C}_0)\Big\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}({}_{2m-1}\mathrm{C}_0+{}_{2m-1}\mathrm{C}_1+{}_{2m-1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2m-1}\mathrm{C}_{m-1}$$
$$+{}_{2m-1}\mathrm{C}_m+{}_{2m-1}\mathrm{C}_{m+1}+\cdots+{}_{2m-1}\mathrm{C}_{2m-2}+{}_{2m-1}\mathrm{C}_{2m-1})$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}(1+1)^{2m-1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\cdot 2^{2m-1}$$

$$=\underset{ケ}{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$\boxed{ケ}$ の $\boxed{\text{別解}}$

$$a_n \leqq \frac{1}{2} \iff X_1+X_2+\cdots+X_n \leqq \frac{n}{2}$$

n 回の試行において，表が k 回，裏が $n-k$ 回出る確率は ${}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$，

表が $n-k$ 回，裏が k 回出る確率は ${}_n\mathrm{C}_{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$ であるから，両者の確率は等しい．

したがって，表が 0，1，$\cdots$，$\frac{n-1}{2}$ 回出る確率の和 p_1 と，表が $\frac{n+1}{2}$，$\frac{n+3}{2}$，$\cdots$，n 回出る確率の和 p_2 も等しい．

また，表が出る回数のとりうる値は 0，1，2，$\cdots$，n であるから，

$$p_1 + p_2 = 1$$

これらより，$p_1 = p_2 = \dfrac{1}{2}$ である．

よって，求める確率は，$p_1 = \underset{\text{ケ}}{\dfrac{1}{2}}$

〔3〕　$a_n = 0$ である条件は，

$$a_n = 0 \iff X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0$$

$\iff$ n 回の試行において，すべて裏が出る

であり，裏が出る確率は $1-p$ であるから，求める確率は $\underset{\text{コ}}{(1-p)^n}$

$na_n = 2$ となる条件は，

$$na_n = 2 \iff X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 2$$

$\iff$ n 回の試行において，表が出る回数が 2 回

である．$na_n = 2$ となる確率を $P(p)$ とすると，

$$P(p) = {}_n\mathrm{C}_2\, p^2(1-p)^{n-2} \ (n \geqq 2)$$

$n = 2$ のとき，$P(p) = p^2$ であるから，$0 \leqq p \leqq 1$ において $P(p)$ が最大になるのは $p = 1$ のとき．

$n \geqq 3$ のとき，

$$\begin{aligned} P'(p) &= {}_n\mathrm{C}_2\{2p(1-p)^{n-2} + p^2(n-2)(1-p)^{n-3}(-1)\} \\ &= {}_n\mathrm{C}_2\, p(1-p)^{n-3}\{2(1-p) - (n-2)p\} \\ &= {}_n\mathrm{C}_2\, p(1-p)^{n-3}(2-np) \end{aligned}$$

p	0	$\cdots$	$\frac{2}{n}$	$\cdots$	1
$P'(p)$		$+$	0	$-$	
$P(p)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

したがって，$0 \leqq p \leqq 1$ において $P(p)$ が最大になるのは $p = \dfrac{2}{n}$ のときであり，これは $n = 2$ のときも成り立つ．

よって，$na_n = 2$ となる確率が最も高くなるのは，$p = \underset{\text{サ}}{\dfrac{2}{n}}$ のときである．