〔I〕

■解答例□

(1) 真数条件から，関数 $f(x)$ の定義域は $x>0$ である。

C と x 軸の共有点の x 座標は方程式 $f(x)=0$ の $x>0$ における解であるから，

$$(\log x)^2-3\log x=0$$

$$(\log x-3)\log x=0$$

$$\log x-3=0 \quad \text{または} \quad \log x=0$$

したがって，C と x 軸の共有点の x 座標は e^3 と 1

また，$f'(x)=\dfrac{2\log x}{x}-\dfrac{3}{x}=\dfrac{2\log x-3}{x}$ より，

$x>0$ における $f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

よって，この増減表から $f(x)$ の最小値は，

$$f(e^{\frac{3}{2}})=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}$$

(2) $f''(x)=\dfrac{x\cdot\dfrac{2}{x}-1\cdot(2\log x-3)}{x^2}=\dfrac{-2\log x+5}{x^2}$ である。

$x^2>0$ であるから，$x>0$ における $f(x)$ の増減と凹凸は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	$e^{\frac{5}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	$-\frac{9}{4}$	↗	$-\frac{5}{4}$	↗

したがって，$a=e^{\frac{5}{2}}$ となる。

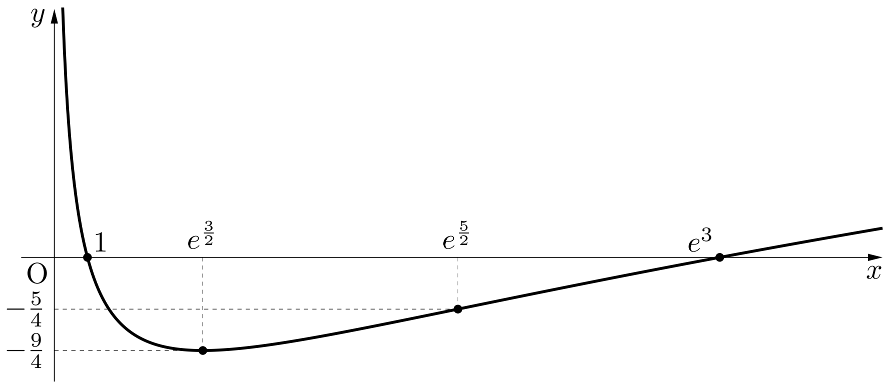
さらに，$\displaystyle\lim_{x\to+0}(\log x)^2=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-\log x)=\infty$ より，

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$$

であり，また，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{(\log x)^2\left(1-\frac{3}{\log x}\right)\right\}=\infty$$

以上のことから，C の概形は次図となる。



(3) $f'(x)=\dfrac{2\log x-3}{x}$ より，点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における C の接線の方程式は

$$y-f(p)=f'(p)(x-p)$$

$$y=\frac{2\log p-3}{p}x+(\log p)^2-5\log p+3$$

(4) C の接線が点 $\mathrm{B}(0,\ b)$ を通るので (3) の結果より，

$$b=(\log p)^2-5\log p+3$$

が成り立つ。$g(x)=(\log x)^2-5\log x+3\ \ (x>0)$ とすると，$g'(x)=\dfrac{2\log x}{x}-\dfrac{5}{x}=\dfrac{2\log x-5}{x}$ であるから，$x>0$ における $g(x)$ の増減は以下のようになる。

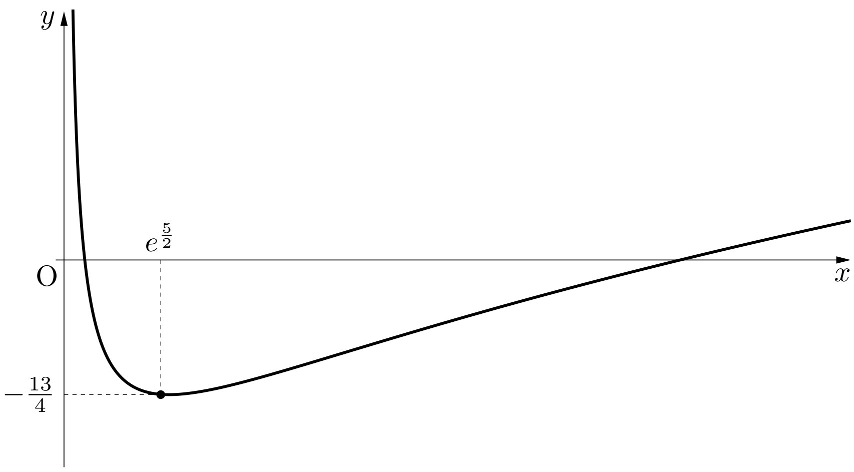
x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{5}{2}}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	$-\dfrac{13}{4}$	$\nearrow$

また，(2) と同様に考えると，

$$\lim_{x\to+0} g(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$$

以上のことから，$y=g(x)$ のグラフは下図となる。



このグラフより，$y=g(x)$ と $y=b$ の共有点の個数は，

$$\begin{cases} b < -\dfrac{13}{4} \text{ のとき，0 個} \\ b = -\dfrac{13}{4} \text{ のとき，1 個} \\ b > -\dfrac{13}{4} \text{ のとき，2 個} \end{cases}$$

よって，点 B$(0,\ b)$ を通る C の接線の本数と，$y = g\,(x)$ と $y = b$ の共有点の個数は一致するので，

点 B$(0,\ b)$ を通る C の接線の本数は，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\begin{cases} b < -\dfrac{13}{4} \text{ のとき，0 本} \\ b = -\dfrac{13}{4} \text{ のとき，1 本} \\ b > -\dfrac{13}{4} \text{ のとき，2 本} \end{cases}}$$

〔II〕

(1) $\boxed{①}$ (1，1，2)

(2) $\boxed{②}$ $3b_{n+1}-2b_n$ $\boxed{③}$ c_n

(3) $\boxed{④}$ 1 $\boxed{⑤}$ 2^n-1 $\boxed{⑥}$ 2^n-n

■解説□

(1)
$$x^3-4x^2+5x-2=0$$
$$(x-1)^2(x-2)=0$$

より，$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ に注意すると，$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\underset{①}{(1,\ 1,\ 2)}$

(2) (1) より，$b_n=a_{n+1}-a_n$ である。

ここで，数列 $\{a_n\}$ の定め方から，

$$a_{n+3}-4a_{n+2}+5a_{n+1}-2a_n=0$$
$$a_{n+3}=4a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n$$

がわかるので，

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= a_{n+3}-a_{n+2} \\ &= 4a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n-a_{n+2} \\ &= 3(a_{n+2}-a_{n+1})-2(a_{n+1}-a_n) \\ &= \underset{②}{3b_{n+1}-2b_n} \end{aligned}$$

また，(1) より，$c_n=b_{n+1}-2b_n$ であるので，これと上式を用いると，

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= b_{n+2}-2b_{n+1} \\ &= 3b_{n+1}-2b_n-2b_{n+1} \\ &= b_{n+1}-2b_n \\ &= \underset{③}{c_n} \end{aligned}$$

(3) $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 5$ と $b_n = a_{n+1} - a_n$ より，

$$b_1 = a_2 - a_1 = 1$$

$$b_2 = a_3 - a_2 = 3$$

がわかるので，$c_n = b_{n+1} - 2b_n$ より，

$$c_1 = b_2 - 2b_1 = \underset{④}{1}$$

また，(2) よりすべての自然数 n に対して，$c_{n+1} = c_n$ が成り立つので，数列 $\{c_n\}$ は定数数列となることがわかる。よって，

$$c_n = c_1 = 1$$

となり，$c_n = b_{n+1} - 2b_n$ であるから，

$$b_{n+1} - 2b_n = 1$$

$$b_{n+1} = 2b_n + 1$$

$$b_{n+1} + 1 = 2\left(b_n + 1\right)$$

これより，数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 2$，公比 2 の等比数列であるから，

$$b_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$b_n = \underset{⑤}{2^n - 1}$$

さらに，$a_{n+1} - a_n = b_n = 2^n - 1$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $2^n - 1$ となるので，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(2^k - 1\right) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} - (n - 1) \\ &= 2^n - n \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも満たすので，$a_n = \underset{⑥}{2^n - n}$

〔III〕

(1)　① $-2\sin\theta - 2\sin 2\theta$　　② $2\cos\theta - 2\cos 2\theta$

(2)　③ π

(3)　④ $8 - 8\cos 3\theta$　　⑤ $4\sin\frac{3}{2}\theta$　　⑥ 16

■解説□

(1) $x = 2\cos\theta + \cos 2\theta$ より，

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\cdot(-\sin\theta) + (-\sin 2\theta)\cdot 2 = -2\sin\theta - 2\sin 2\theta \text{①}$$

また，$y = 2\sin\theta - \sin 2\theta$ より，

$$\frac{dy}{d\theta} = 2\cdot\cos\theta - (\cos 2\theta)\cdot 2 = 2\cos\theta - 2\cos 2\theta \text{②}$$

(2) $\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ より，

$$-2\sin\theta - 2\sin 2\theta = 0$$
$$\sin\theta + \sin 2\theta = 0$$
$$\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 0$$
$$\sin\theta(1 + 2\cos\theta) = 0$$
$$\sin\theta = 0 \quad \text{または} \quad \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$0 < \theta < 2\pi$ において，これを満たす θ の値は，

$$\theta = \pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

であるが，

$\theta = \pi$ のとき，　$\dfrac{dy}{d\theta} = -4 \neq 0$

$\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$ のとき，　$\dfrac{dy}{d\theta} = 0$

となる。

以上より，$\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ となるが $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ とならない θ の値 (ただし，$0 < \theta < 2\pi$) は，

$$\theta = \pi \text{③}$$

である。

(3) (1) の結果より，

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$

$$=(-2\sin\theta-2\sin 2\theta)^2+(2\cos\theta-2\cos 2\theta)^2$$

$$=4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+4(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)-8(\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta)$$

$$=\underset{\text{④}}{\underline{8-8\cos 3\theta}}$$

であり，

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$$

$$=\sqrt{8-8\cos 3\theta}=\sqrt{8-8\left(1-2\sin^2\frac{3}{2}\theta\right)}=\sqrt{16\sin^2\frac{3}{2}\theta}=\underset{\text{⑤}}{\underline{\left|4\sin\frac{3}{2}\theta\right|}}$$

である。

これより，曲線 C の長さを L とすると，

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left|4\sin\frac{3}{2}\theta\right|d\theta$$

ここで，

$$0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi \quad \text{のとき，} \quad 4\sin\frac{3}{2}\theta\geqq 0$$

$$\frac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\frac{4}{3}\pi \quad \text{のとき，} \quad 4\sin\frac{3}{2}\theta\leqq 0$$

$$\frac{4}{3}\pi\leqq\theta\leqq 2\pi \quad \text{のとき，} \quad 4\sin\frac{3}{2}\theta\geqq 0$$

である。また，積分定数 C' を用いて，

$$\int 4\sin\frac{3}{2}\theta\,d\theta=4\cdot\frac{2}{3}\left(-\cos\frac{3}{2}\theta\right)+C'=-\frac{8}{3}\cos\frac{3}{2}\theta+C'$$

となることから，求める C の長さは，

$$L=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}4\sin\frac{3}{2}\theta\,d\theta-\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}4\sin\frac{3}{2}\theta\,d\theta+\int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi}4\sin\frac{3}{2}\theta\,d\theta$$

$$=\left[-\frac{8}{3}\cos\frac{3}{2}\theta\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}-\left[-\frac{8}{3}\cos\frac{3}{2}\theta\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}+\left[-\frac{8}{3}\cos\frac{3}{2}\theta\right]_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi}$$

$$=\left\{\frac{8}{3}-\left(-\frac{8}{3}\right)\right\}-\left\{\left(-\frac{8}{3}\right)-\frac{8}{3}\right\}+\left\{\frac{8}{3}-\left(-\frac{8}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{8}{3}\cdot 6=\underset{\text{⑥}}{\underline{16}}$$

となる。

〔IV〕

(1) $\boxed{①}$ 11　　$\boxed{②}$ 36

(2) $\boxed{③}$ -3　　$\boxed{④}$ $-1,\ 4$

(3) $\boxed{⑤}$ 2　　$\boxed{⑥}$ $\frac{3}{17}$

(4) $\boxed{⑦}$ $\frac{4}{9}$　　$\boxed{⑧}$ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

■解説□

(1) 10 以上 100 以下の自然数 N のうち，N^2 を 5 で割って 1 余るものである n は，整数 p を用いて，$n^2=5p+1$ と表せるので，

$$5p=n^2-1=(n+1)(n-1)$$

となる。$5p$ は 5 の倍数であるから，$n+1$，$n-1$ のいずれかが 5 の倍数であることがわかる。このような 10 以上 100 以下の自然数 n は，$n+1$ が 5 の倍数となるとき，$n=14,\ 19,\ \cdots,\ 99$ の 18 個，$n-1$ が 5 の倍数となるとき，$n=11,\ 16,\ \cdots,\ 96$ の 18 個であるので，最小の n は $\underset{①}{11}$ であり，求める n の総数は，

$$18+18=\underset{②}{36}\ (個)$$

である。

(2) 4 点 P，Q，R，S はそれぞれ辺 OB，OC，AC，AB の中点であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\frac{t}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(1,\ \frac{t}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\frac{1}{2}(1+2,\ 2+t,\ 3+1)=\left(\frac{3}{2},\ \frac{t+2}{2},\ 2\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\frac{1}{2}(1+t,\ 2+1,\ 3+0)=\left(\frac{t+1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

となる。これより，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\frac{2-t}{2},\ \frac{t-1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\left(\frac{2-t}{2},\ \frac{t-1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

つまり $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ となるので，四角形 PQRS は平行四辺形である。

また，四角形 PQRS が長方形となる条件は，平行四辺形となる条件に加えて $\mathrm{PQ}\perp\mathrm{PS}$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PS}}=0$ が成り立つことであるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right)$$

を用いて，

$$\frac{2-t}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{t-1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=0$$

これを解いて，

$$t=\underset{③}{-3}$$

また，四角形 PQRS がひし形となる条件は，平行四辺形となる条件に加えて，となりあう辺である PQ，PS について PQ = PS が成り立つことであるから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 = \left(\frac{2-t}{2}\right)^2 + \left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{t^2-3t+3}{2}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PS}}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}$$

を用いて，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{PS}}\right|^2$$

$$\frac{t^2-3t+3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$t^2-3t-4=0$$

$$(t+1)(t-4)=0$$

$$t = -1,\ 4 \quad ④$$

(3) $f(a) = \dfrac{1}{3}$ より，

$$\frac{10^a - 10^{-a}}{10^a + 10^{-a}} = \frac{1}{3}$$

$$3(10^a - 10^{-a}) = 10^a + 10^{-a}$$

$$2\cdot 10^a = 4\cdot 10^{-a}$$

$$10^{2a} = 2 \quad ⑤$$

同様にして，$f(b) = \dfrac{1}{6}$ より，

$$10^{2b} = \frac{7}{5}$$

となるので，

$$10^{2(a-b)} = \frac{10^{2a}}{10^{2b}} = \frac{2}{\frac{7}{5}} = \frac{10}{7}$$

以上より，

$$f(a-b) = \frac{10^{a-b} - 10^{-(a-b)}}{10^{a-b} + 10^{-(a-b)}} = \frac{10^{2(a-b)} - 1}{10^{2(a-b)} + 1} = \frac{\frac{10}{7} - 1}{\frac{10}{7} + 1} = \frac{3}{17} \quad ⑥$$

(4)

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{3-\sin 2\theta} - \frac{1}{3+\sin 2\theta}\right)$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\theta}\cdot\frac{2\sin 2\theta}{(3-\sin 2\theta)(3+\sin 2\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin 2\theta}{2\theta}\cdot\frac{4}{(3-\sin 2\theta)(3+\sin 2\theta)}$$

$$= 1\cdot\frac{4}{3\cdot 3} = \frac{4}{9} \quad ⑦$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{3-\sin^2 2\theta}}-\frac{1}{\sqrt{3+\sin^2 2\theta}}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{\sqrt{3+\sin^2 2\theta}-\sqrt{3-\sin^2 2\theta}}{\sqrt{(3-\sin^2 2\theta)(3+\sin^2 2\theta)}}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{(3+\sin^2 2\theta)-(3-\sin^2 2\theta)}{\sqrt{3^2-(\sin^2 2\theta)^2}\cdot\left(\sqrt{3+\sin^2 2\theta}+\sqrt{3-\sin^2 2\theta}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{2\sin^2 2\theta}{\sqrt{9-\sin^4 2\theta}\cdot\left(\sqrt{3+\sin^2 2\theta}+\sqrt{3-\sin^2 2\theta}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2\cdot\frac{8}{\sqrt{9-\sin^4 2\theta}\cdot\left(\sqrt{3+\sin^2 2\theta}+\sqrt{3-\sin^2 2\theta}\right)}$$

$$=1^2\cdot\frac{8}{3\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{9} \quad ⑧$$