〔１〕

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | ア | 101 | イ | 12 | ウ | 4284 | エ | 4 |
| (2) | オ | 2 | カ | $\dfrac{1}{16}$ | キ | $2\sqrt{2}$ | | |
| (3) | ク | $120^\circ$ | ケ | $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}\pi$ | コ | $3:13$ | | |

## ■ 解説 □

(1) 2020 を素因数分解すると，$2020 = 2^2 \times 5 \times 101$ より，3 桁の素数は $\underline{101}_{\text{ア}}$ の 1 個だけである．また，2020 の正の約数の個数は，

$$(2+1)\times(1+1)\times(1+1) = 3\times2\times2 = \underline{12}_{\text{イ}} \text{ 個}$$

であり，それらの和は，

$$\left(1+2+2^2\right)\times(1+5)\times(1+101) = 7\times6\times102 = \underline{4284}_{\text{ウ}}$$

さらに，3 桁の約数は，素因数 101 に注目すると，

$$101,\quad 101\times2=202,\quad 101\times2^2=404,\quad 101\times5=505$$

の $\underline{4}_{\text{エ}}$ 個存在する．

$$\begin{array}{r|r} 2 & 2020 \\ \hline 2 & 1010 \\ \hline 5 & 505 \\ \hline & 101 \end{array}$$

(2) $\log_2(x+2)+\log_2(2x-3)=2$ について，真数条件より，

$$x+2>0 \text{ かつ } 2x-3>0 \qquad \text{これより，} x>\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

また，与式を変形すると，

$$\log_2(x+2)(2x-3) = \log_2 2^2$$
$$(x+2)(2x-3)=4$$
$$2x^2+x-10=0$$
$$(2x+5)(x-2)=0$$
$$x=-\frac{5}{2},\qquad x=2$$

① に注意すると，$x=\underline{2}_{\text{オ}}$

また，$2(\log_2 x)^2+5\log_2 x-12=0$ について，$\log_2 x = t$ ($t$ は実数) とおくと，

$$2t^2+5t-12=0$$
$$(t+4)(2t-3)=0$$
$$t=-4,\qquad t=\frac{3}{2}$$

$t=-4$ のとき，$\log_2 x=-4$ であるので，$x=\dfrac{1}{16}$

$t=\dfrac{3}{2}$ のとき，$\log_2 x=\dfrac{3}{2}$ であるので，$x=2\sqrt{2}$

以上より，有理数の解 $x=\underline{\dfrac{1}{16}}_{\text{カ}}$ と，無理数の解 $x=\underline{2\sqrt{2}}_{\text{キ}}$ をもつ．

(3) $\triangle$ABC の $A$，$B$，$C$ の対辺の長さをそれぞれ $a$，$b$，$c$ とすると，

正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ より，

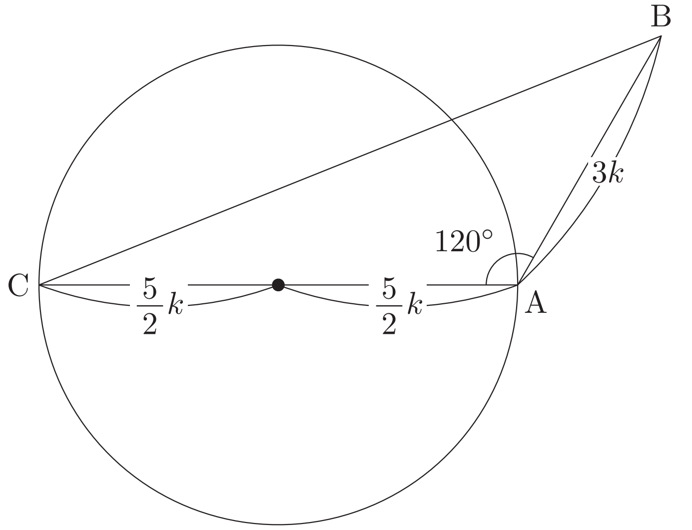
$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$$

これより，$k$ を正の定数とすると，$a = 7k$，$b = 5k$，$c = 3k$ とおける．

ここで，$\triangle$ABC において，余弦定理より，

$$\cos A = \frac{(5k)^2 + (3k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 3k} = \frac{-15k^2}{30k^2} = -\frac{1}{2}$$

なので，$0^\circ < A < 180^\circ$ より，$A = \underbrace{120^\circ}_{ク}$



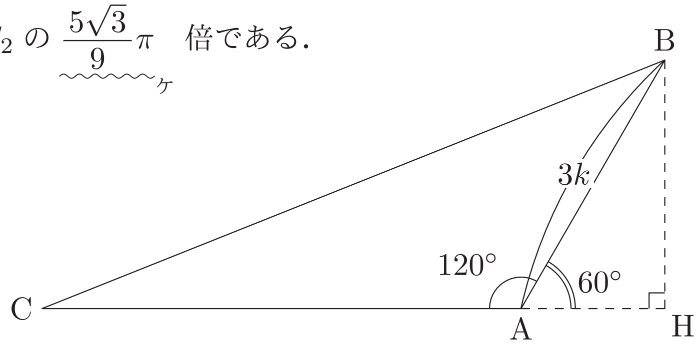

ここで，辺 AC を直径とする円の面積を $S_1$，$\triangle$ABC の面積を $S_2$ とすると，

$$S_1 = \pi \times \left(\frac{5}{2}k\right)^2 = \frac{25\pi}{4}k^2$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 5k \cdot 3k \cdot \sin 120^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4}k^2$$

であることから，$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\dfrac{25\pi}{4}k^2}{\dfrac{15\sqrt{3}}{4}k^2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{9}\pi$

これより，$S_1$ は $S_2$ の $\underbrace{\dfrac{5\sqrt{3}}{9}\pi}_{ケ}$ 倍である．




次に，$\triangle$BAH に注目すると，$\angle$BAH $= 60^\circ$ であるので，

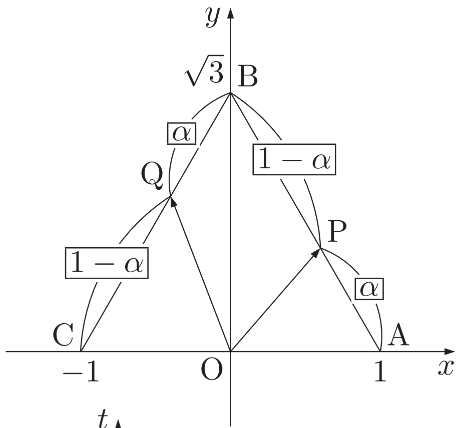
$$\mathrm{AH} = \mathrm{AB}\cos 60^\circ = 3k \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}k$$

以上より，点 H は辺 AC を $\dfrac{3}{2}k : \left(5k + \dfrac{3}{2}k\right) = \underbrace{3 : 13}_{コ}$ の比に外分する．

〔２〕

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | $\left(1-\alpha,\ \sqrt{3}\alpha\right)$ | イ | $3$ | ウ | $\dfrac{1}{4}$ | | |
| エ | $2t$ | オ | $1-2t$ | カ | $2t^2-4t+1$ | キ | $\sqrt{16t^2-12t+3}$ |
| ク | $\dfrac{\pi}{3}$ | ケ | $\dfrac{\pi}{2}$ | コ | $\dfrac{1}{2}$ | | |

■ 解説 □




$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(0,\ \sqrt{3}\right)$ であり，点 P は線分 AB を $\alpha:1-\alpha$ に内分するので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-\alpha)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\left(1-\alpha,\ \sqrt{3}\alpha\right)\end{aligned}$$

これより，点 P の座標は $\underbrace{\left(1-\alpha,\ \sqrt{3}\alpha\right)}_{\text{ア}}$

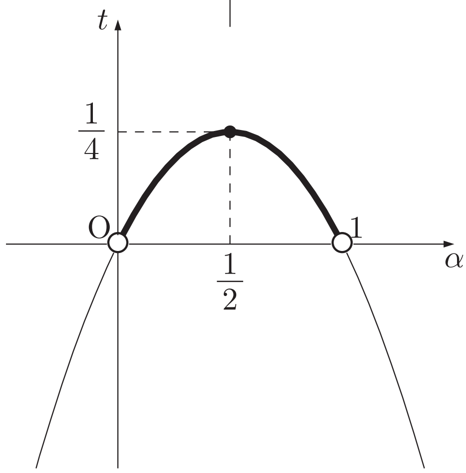
ここで，$\beta=1-\alpha$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\beta,\ \sqrt{3}\alpha\right)$ であるので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\sqrt{\beta^2+\left(\sqrt{3}\alpha\right)^2}=\sqrt{\underbrace{3}_{\text{イ}}\alpha^2+\beta^2}$$

さらに，$t=\alpha\beta$ とおくと，$\beta=1-\alpha$，$0<\alpha<1$ であることから，

$$t=\alpha\,(1-\alpha)=-\alpha^2+\alpha=-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

これより，$t$ のとりうる値の範囲は $0<t\leqq\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{ウ}}$




また，同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(0,\ \sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(-1,\ 0)$ であり，点 Q は線分 BC を $\alpha:1-\alpha$ に内分するので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=(1-\alpha)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\left(-\alpha,\ \sqrt{3}\,(1-\alpha)\right)=\left(-\alpha,\ \sqrt{3}\beta\right)\end{aligned}$$

であることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\beta\cdot(-\alpha)+\sqrt{3}\alpha\cdot\sqrt{3}\beta=-\alpha\beta+3\alpha\beta=\underbrace{2t}_{\text{エ}}$$

また，$\beta=1-\alpha$ より，$\alpha+\beta=1$ であることに注意すると，

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\underbrace{1-2t}_{\text{オ}}$$

$$\begin{aligned}\alpha^4+\beta^4&=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-2\alpha^2\beta^2\\&=(1-2t)^2-2t^2=\underbrace{2t^2-4t+1}_{\text{カ}}\end{aligned}$$

さらに，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=\sqrt{(-\alpha)^2+\left(\sqrt{3}\beta\right)^2}=\sqrt{\alpha^2+3\beta^2}$ であることから，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|&=\sqrt{3\alpha^2+\beta^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+3\beta^2}=\sqrt{3\alpha^4+3\beta^4+10\alpha^2\beta^2}\\&=\sqrt{3\left(2t^2-4t+1\right)+10t^2}=\underbrace{\sqrt{16t^2-12t+3}}_{\text{キ}}\end{aligned}$$

であるので，$\angle\mathrm{POQ}=\theta\ \ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ として，**エ**，**キ**を用いると，

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|} = \frac{2t}{\sqrt{16t^2 - 12t + 3}} = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{3}{t^2} - \dfrac{12}{t} + 16}}$$

ここで，$\dfrac{1}{t} = u$ とおくと，$0 < t \leqq \dfrac{1}{4}$ より，$u \geqq 4$ であり，

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{3u^2 - 12u + 16}} = \frac{2}{\sqrt{3\left(u-2\right)^2 + 4}}$$

上式で表される $\cos\theta$ の $u \geqq 4$ におけるとりうる値の範囲を求めよう．

$u \geqq 4$ より，$3\left(u-2\right)^2 + 4 \geqq 16$ であるので，

$$\sqrt{3\left(u-2\right)^2 + 4} \geqq 4$$

$$0 < \frac{2}{\sqrt{3\left(u-2\right)^2 + 4}} \leqq \frac{1}{2}$$

$$0 < \cos\theta \leqq \frac{1}{2}$$

よって，$\theta$ のとりうる値の範囲は，$\underbrace{\dfrac{\pi}{3}}_{\text{ク}} \leqq \theta < \underbrace{\dfrac{\pi}{2}}_{\text{ケ}}$

また，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ となるのは，$u = 4$，すなわち $t = \dfrac{1}{4}$ のときであり，

$$t = -\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

より，$\alpha = \underbrace{\dfrac{1}{2}}_{\text{コ}}$ のときである．

【ク・ケの別解】

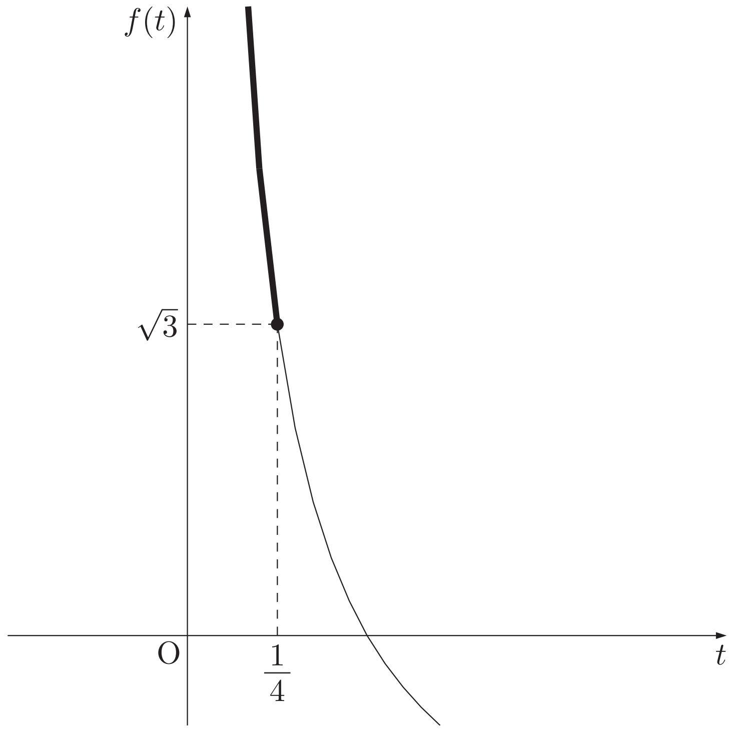
ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\beta,\ \sqrt{3}\alpha\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(-\alpha,\ \sqrt{3}\beta\right)$ であることより，$\angle\mathrm{AOP}=\theta_1$，$\angle\mathrm{AOQ}=\theta_2$ とすると，

$$\tan\theta_1=\frac{\sqrt{3}\alpha}{\beta},\qquad \tan\theta_2=-\frac{\sqrt{3}\beta}{\alpha}$$

であるので，$\theta=\angle\mathrm{POQ}$ について，tan の加法定理より，

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan\left(\theta_2-\theta_1\right)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}\\&=\frac{-\dfrac{\sqrt{3}\beta}{\alpha}-\dfrac{\sqrt{3}\alpha}{\beta}}{1+\left(-\dfrac{\sqrt{3}\beta}{\alpha}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}\alpha}{\beta}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-2t}{t}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{t}-2\right)\end{aligned}$$

であるので，$f\left(t\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{t}-2\right)$ $\left(0<t\leqq\dfrac{1}{4}\right)$ のグラフを描くと，




また，$\displaystyle\lim_{t\to+0}f\left(t\right)=\lim_{t\to+0}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{t}-2\right)=+\infty$ であることから，

$$\tan\theta\geqq\sqrt{3}$$

これより，$\underset{ク}{\dfrac{\pi}{3}}\leqq\theta<\underset{ケ}{\dfrac{\pi}{2}}$

## 〔3〕

$\boxed{\text{ア}}$ $3^n$　$\boxed{\text{イ}}$ $\dfrac{3}{2}(3^n-1)$　$\boxed{\text{ウ}}$ $\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　$\boxed{\text{エ}}$ $\dfrac{35}{36}$　$\boxed{\text{オ}}$ $\dfrac{1}{6}(2n+1)(2n+3)$

$\boxed{\text{カ}}$ $\dfrac{2n+3}{3^n n(n+1)}$　$\boxed{\text{キ}}$ $2$　$\boxed{\text{ク}}$ $\dfrac{13}{12}$　$\boxed{\text{ケ}}$ $\dfrac{1}{3^{n-1}n}$　$\boxed{\text{コ}}$ $\dfrac{41}{36}$

### ■解説□

$a_n = 3\cdot 3^{n-1} = 3^n$（$n \geqq 1$）であり，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} 3^k \\ &= \frac{3(3^n-1)}{3-1} = \frac{3}{2}(3^n-1)\end{aligned}$$

である．

$b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ である．

$(*)$ の両辺で $n=1$ とすれば，

$$a_1b_1c_1 = \frac{1}{36}\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$

$$3\cdot 1\cdot c_1 = \frac{1}{36}\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \qquad \therefore c_1 = \frac{35}{36}$$

を得る．また $n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}T_n - T_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n} a_kb_kc_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_kb_kc_k \quad \cdots(**) \\ &= \frac{1}{36}(2n+1)(2n+3)(2n+5) - \frac{1}{36}(2n-1)(2n+1)(2n+3) \\ &= \frac{1}{36}\{(2n+5)-(2n-1)\}(2n+1)(2n+3) \\ &= \frac{1}{6}(2n+1)(2n+3)\end{aligned}$$

であり，$(**)$ より $T_n - T_{n-1} = a_nb_nc_n$（$n \geqq 2$）でもあるから，

$$a_nb_nc_n = \frac{1}{6}(2n+1)(2n+3)$$

$$3^n\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdot c_n = \frac{1}{6}(2n+1)(2n+3)$$

$$\therefore c_n = \frac{2n+3}{3^n n(n+1)} \qquad (n \geqq 2)$$

となる．これは $n=1$ のとき成り立たないから $\{c_n\}$ の一般項は，

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{35}{36} & (n=1) \\ \dfrac{2n+3}{3^n n(n+1)} & (n \geqq 2) \end{cases}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n3^n c_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2\end{aligned}$$

である．

$N \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{3^n c_n}{2n+3} = \frac{3c_1}{5} + \sum_{n=2}^{N}\frac{3^n c_n}{2n+3} &= \frac{7}{12} + \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\\ &= \frac{7}{12} + \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{7}{12} + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)\\ &= \frac{7}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n c_n}{2n+3} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{3^n c_n}{2n+3} &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{7}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1}\right)\\ &= \frac{7}{12} + \frac{1}{2} = \frac{13}{12}\end{aligned}$$

となる．また，

$$\begin{aligned}c_n + \frac{1}{3^n(n+1)} &= \frac{2n+3}{3^n n(n+1)} + \frac{1}{3^n(n+1)}\\ &= \frac{(2n+3)+n}{3^n n(n+1)}\\ &= \frac{1}{3^{n-1}n}\end{aligned}$$

であるから，$c_n = \dfrac{1}{3^{n-1}n} - \dfrac{1}{3^n(n+1)}$ である．よって $N \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} c_n = c_1 + \sum_{n=2}^{N} c_n &= c_1 + \sum_{n=2}^{N}\left\{\frac{1}{3^{n-1}n} - \frac{1}{3^n(n+1)}\right\}\\ &= \frac{35}{36} + \left(\frac{1}{3^1\cdot 2} - \frac{1}{3^2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{3^2\cdot 3} - \frac{1}{3^3\cdot 4}\right) + \cdots + \left\{\frac{1}{3^{N-1}N} - \frac{1}{3^N(N+1)}\right\}\\ &= \frac{35}{36} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3^N(N+1)}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} c_n &= \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{35}{36} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3^N(N+1)}\right\}\\ &= \frac{35}{36} + \frac{1}{6} = \frac{41}{36}\end{aligned}$$

となる．

〔4〕

(1)　$\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{x}}}$，$\boldsymbol{g'(x) = \dfrac{-b}{2\sqrt{c-x}}}$

(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は $x$ 座標が 1 の点 A で交わり，かつ接線が直交するので

$$\begin{cases} f(1)=g(1) \\ f'(1)g'(1)=-1 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} a=b\sqrt{c-1} & \cdots\cdots① \\ \dfrac{a}{2}\cdot\left(-\dfrac{b}{2\sqrt{c-1}}\right)=-1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

② は　$ab=4\sqrt{c-1}$

これに ① を代入して　$b^2\sqrt{c-1}=4\sqrt{c-1}$

$b>0$，$\sqrt{c-1}>0$　なので　$\boldsymbol{b=2}$

① から　$\boldsymbol{a=2\sqrt{c-1}}$　$\cdots\cdots①'$

(3)　$D$ の面積が $\dfrac{40}{3}$ なので

$$\begin{aligned} \frac{40}{3} &= \int_0^1 a\sqrt{x}\,dx + \int_1^c 2\sqrt{c-x}\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[-\frac{4}{3}(c-x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^c \\ &= \frac{2}{3}a + \frac{4}{3}(c-1)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3}a + \frac{a^3}{6} \quad (\because ①') \end{aligned}$$

これより　$a^3+4a-80=0$　すなわち　$(a-4)(a^2+4a+20)=0$

$a>0$ なので　$\boldsymbol{a=4}$

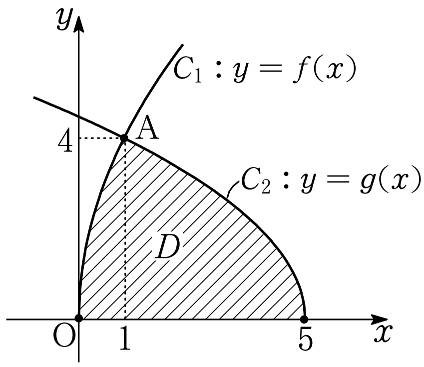
①′ から　$\boldsymbol{c=5}$

これらのことから　$f(x)=4\sqrt{x}$，$g(x)=2\sqrt{5-x}$

$f(1)=4$ であるから　**A(1, 4)**

(4)

$$\begin{aligned} V_x &= \int_0^1 \pi\bigl(f(x)\bigr)^2dx + \int_1^5 \pi\bigl(g(x)\bigr)^2dx \\ &= \pi\int_0^1 16x\,dx + \pi\int_1^5 4(5-x)\,dx \\ &= \pi\Bigl[8x^2\Bigr]_0^1 + \pi\Bigl[-2(5-x)^2\Bigr]_1^5 = 8\pi+32\pi \\ &= \boldsymbol{40\pi} \end{aligned}$$




$y=4\sqrt{x}$ とおくと　$x=\dfrac{y^2}{16}$

$y=2\sqrt{5-x}$ とおくと　$x=5-\dfrac{y^2}{4}$

$$\begin{aligned} V_y &= \pi\int_0^4 \left\{\left(5-\frac{y^2}{4}\right)^2 - \left(\frac{y^2}{16}\right)^2\right\}dy = \pi\int_0^4\left(25-\frac{5}{2}y^2+\frac{15}{256}y^4\right)dy \\ &= \pi\left[25y-\frac{5}{6}y^3+\frac{3}{256}y^5\right]_0^4 = \pi\left(100-\frac{160}{3}+12\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{176}{3}\pi} \end{aligned}$$